## Кодирование чисел. Системы счисления

### Что нужно знать?

1) принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления;
2) правила перевода из 10-ной в любую другую систему счисления и соотношение между 2-ной, 8-ной и 16-ной системами счисления;
3) число $2^N$ в двоичной системе записывается как единица и N нулей:

$$2^N = 1\underbrace{0000\ldots0}_{N}{}_2$$

Число $x^N$-1 в x системе записывается как N единиц:

$$2^N - 1 = \underbrace{11\ldots1}_{N}{}_2$$

Число $2^N – 2^K$ при K < N в x системе записывается как N–K единиц и K нулей:

$$2^N - 2^K = \underbrace{11\ldots1}_{N-K}\underbrace{00\ldots00}_{K}{}_2$$

$2^N + 2^N = 2*2^N = 2^{N+1}$
$2^N = 2^{N+1} - 2^N$
$- 2^N = - 2^{N+1} + 2^N$

**Например:**

Число $10^N$ в десятичной (более привычной!) системе записывается как единица и N нулей:

$$10^N=1\underbrace{0000\ldots0}_{N}{}_{10}$$ **Пример:** $10^4=10000$

Число $10^N$-1 в десятичной системе записывается как N девяток (!):

$$10^N-1=\underbrace{99\ldots9}_{N}{}_{10}$$ **Пример:** $10^4-1= 9999$

Число $10^N–10^K$ при K < N в десятичной системе записывается как N–K девяток и K нулей:

$$10^N-10^K=\underbrace{99\ldots9}_{N-K}\underbrace{00\ldots00}_{K}{}_{10}$$

**Пример:** $10^5-10^2=$

$$\begin{array}{r} \_\;100000 \\ \underline{100} \\ 99900 \end{array}$$

5-2=3 2

## Переход к другим системам счисления:

Число $3^N$ в троичной системе записывается как единица и N нулей:

$$3^N = 1\underbrace{0000....0}_{N}{}_3$$

Число $3^N$-1 в троичной системе записывается как N двоек:

$$3^N - 1 = \underbrace{222...2}_{N}{}_3$$

Число $3^N – 3^K$ при K < N в троичной система записывается как N–K двоек и K нулей:

$$3^N - 3^K = \underbrace{222...2}_{N-K}\underbrace{00...00}_{K}{}_3$$

## Пример с решением:

Сколько значащих нулей содержится в двоичной записи числа, которое можно представить в виде:

$$8^{510} + 4^{1500} - 16\ ?$$

**Алгоритм решения:**

- все числа переводим в степени двойки;
- выстраиваем всю запись по убыванию степени:

$2^{3000} + 2^{1530} – 2^4 =$

$2^{3000}$ = 100000…000 (1 и 3000 нулей)

$2^{1530} - 2^4$ = 11111…1111 0000 (1526 единиц и 4 нуля)

**Получаем в результате сложения: 100000…00011111….11110000**

Нулей: 3000 – 1530 + 4 = **1474**

**Использование:** $- 2^N = - 2^{N+1} + 2^N$

## Пример с решением:

Значение арифметического выражения: $9^8 + 3^5 - 2$ – записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

$$9^8+3^5-\underbrace{2}_{2=3-1}=\underbrace{3^{16}}_{\begin{array}{c}\text{1 единица,}\\ \text{16 нулей}\end{array}}+\underbrace{3^5-3^1}_{\begin{array}{c}\text{4 двойки,}\\ \text{1 нуль}\end{array}}+\underbrace{3^0}_{\text{1 единица}}$$

Итого: **4.**

## Поиск основания системы счисления по записи числа в этой системе

1. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 18 записывается в виде 30. Укажите это основание.

**Решение**

$18_{10}=30_x$

$3^1 0^0{}_x = 3*x^1+0$

$3x=18$

$x= 6$

Основание системы счисления **6**.

2. Запись числа $65_8$ в некоторой системе счисления выглядит так: $311_q$. Найдите основание системы счисления q.

**Решение**

**а) Переведем $65_8$ в десятичную систему счисления:**

**$6^1 5^0{}_8= 6*8^1+5*8^0=53_{10}$**

**б) $311_q=53_{10}$**

$3^2 1^1 1^0{}_q= 3*q^2+1*q^1+1*q^0=53_{10}$

$3*q^2+1*q^1-52=0$

Решаем квадратное уравнение

$q_1=4$

Основание системы счисления **4**.

3. Решите уравнение: $35_6 + x = 35_7$. Ответ запишите в десятичной системе счисления.

**Решение**

Приведем элементы уравнения к десятичному виду:

$3^1 5^0{}_6 = 3\cdot 6^1 + 5\cdot 6^0 = 23_{10}$;

$3^1 5^0{}_7 = 3\cdot 7^1 + 5\cdot 7^0 = 26_{10}$.

Запишем получившееся уравнение: $23_{10} + x = 26_{10} \Leftrightarrow \mathbf{x = 3_{10}}$.

4. Решите уравнение $121_x+1=101_7$.

Ответ запишите в троичной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

**Решение:**

переведём все числа в десятичную систему счисления:

$$121_x = 1\cdot x^2+2\cdot x+1,\quad 101_7 = 1\cdot 7^2+0\cdot 7^1+1\cdot 7^0 = 50_{10}$$

собирая всё в одно уравнение получаем

$$x^2+2x+1+1=50 \quad\Rightarrow\quad x^2+2x-48=0$$

это уравнение имеет два решения, 6 и -8; основание системы счисления не может быть отрицательным, поэтому ответ 6.

Переводим ответ в троичную систему: $6 = 20_3$.

Ответ: **20.**

5. В системе счисления с основанием N запись числа $79_{10}$ оканчивается на 2, а запись числа $111_{10}$ — на 1. Чему равно число N?

**Решение.**

Так как запись чисел оканчивается на 1 и 2, то основание системы счисления не может быть меньше трёх. Последняя цифра в записи числа — это остаток от деления числа на основание системы счисления. Подбором находим, что условию удовлетворяет только N = 11.

Ответ: **11.**

## Задания для тренировки

1. Десятичное число 63 в некоторой системе счисления записывается как 120. Определите основание системы счисления.
2. В системе счисления с основанием N запись числа $41_{10}$ оканчивается на 2, а запись числа $131_{10}$ — на 1. Чему равно число N?
3. Решите уравнение: $35_6 + x = 35_7$. Ответ запишите в десятичной системе счисления.
4. Укажите, сколько всего раз встречается цифра 2 в записи чисел 10, 11, 12, …, 17 в системе счисления с основанием 5.
5. Значение арифметического выражения: $9^{18} + 3^{54} – 9$ — записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

## Ответы к заданиям для тренировки

1. 7
2. 13
3. 3
4. 7
5. 34