Тема 7

Рациональные неравенства

Неравенства, которые можно привести к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – некоторые многочлены, $Q(x)$ – не тождественный нуль, $\vee$ – один из знаков $>, <, \geq, \leq$, называются *рациональными неравенствами.*

При решении рациональных неравенств удобно пользоваться следующими утверждениями:

1. Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ равносильно неравенству $P(x) \cdot Q(x) > 0$.
2. Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ равносильно неравенству $P(x) \cdot Q(x) < 0$.
3. Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ равносильно системе $\begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$
4. Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ равносильно системе $\begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Задача 14. Решите неравенство $\frac{1}{x} \leq 1$.

Решение. Приведём неравенство к одному из указанных выше видов. Для этого перенесем 1 влево и приведём к общему знаменателю: $\frac{1-x}{x} \leq 0$. Это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x(1-x) \leq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является множество $(-\infty;0] \cup [1;+\infty)$.
С учетом второго условия получаем
Ответ: $x \in (-\infty;0) \cup [1;+\infty)$.

Метод интервалов

Мы видим, что решение любого рационального неравенства сводится к решению неравенства вида $F(x) \vee 0$, где $F(x)$ – некоторый многочлен, $\vee$ – один из знаков $>, <, \geq, \leq$.

Пусть $F(x)$ – некоторый многочлен степени n. Возможны два случая разложения этого многочлена на множители.

1-й случай. $F(x) = a_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_{l-1})^{k_{l-1}}(x-a_l)^{k_l}$, где $a_0, a_1, ..., a_l$ – действительные числа; $k_1, k_2, ..., k_l$ – натуральные числа, $k_1 + k_2 + ... + k_l = n$.

Пусть $a_1 < a_2 < ... < a_{l-1} < a_l$. Изобразим эти точки на числовой прямой, получим $l+1$ промежутков. Расставим знаки «+» или «–» в каждом промежутке по следующему правилу: справа от самой правой точки ставят знак коэффициента a_0. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через точку a_i меняют знак, если число k_i чётное , и оставляют тот же знак, если оно нечетное. В качестве решения исходного неравенства берут объединение промежутков с подходящими знаками. Если неравенство строгое, то концы промежутков в ответ не входят, а если нестрогое, то входят.

Задача 15. Решите неравенство

$$(x+3)(3x-2)^5(7-x)^3(5x+8)^2 \geq 0.$$

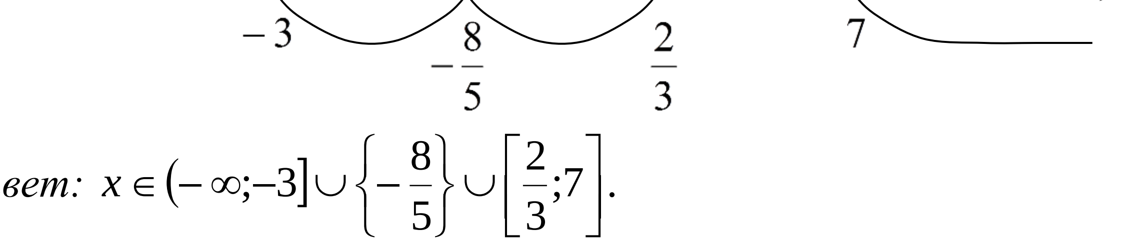
Решение. Перепишем неравенство в виде

$$3^5 \cdot (-1)^3 5^2 (x+3)\left(x+\frac{8}{5}\right)^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^5(x-7)^3 \geq 0,$$

или

$$-3^5 \cdot 5^2 (x-(-3))\left(x-\left(-\frac{8}{5}\right)\right)^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^5(x-7)^3 \geq 0.$$

Отметим точки $-3, -\frac{8}{5}, \frac{2}{3}, 7$ на числовой оси. Справа от точки 7 ставим знак «–», при переходе через точки $7, \frac{2}{3}, -3$ знак меняется, при переходе через точку $-\frac{8}{5}$ остаётся прежним. Итак, имеем



Ответ: $x \in (-\infty;-3] \cup \left\{-\frac{8}{5}\right\} \cup \left[\frac{2}{3};7\right]$.

2-й случай

$$F(x)=a_0(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_l)^{k_l}\left(b_1x^2+c_1x+d_1\right)^{s_1}\dots\left(b_mx^2+c_mx+d_m\right)^{s_m},$$

где $a_0, a_1, \dots, a_l, b_1, c_1, d_1, \dots, b_m, c_m, d_m$ – действительные числа, $k_1, \dots, k_l, s_1, \dots, s_m$ – натуральные числа, $k_1+\dots+k_l+2s_1+\dots+2s_m=n$ и каждый из квадратных трёхчленов $b_ix^2+c_ix+d_i$ имеет отрицательный дискриминант. Тогда неравенство $F(x)\vee 0$ равносильно неравенству

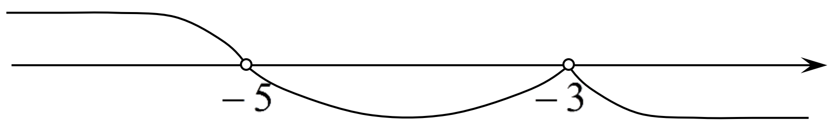
$$a_0b_1^{s_1}\dots b_m^{s_m}(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_l)^{k_l}\vee 0,$$

поскольку квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом имеет постоянный знак, совпадающий со знаком старшего коэффициента.

Задача 16. Решите неравенство

$$(x+3)^2(x+5)^3\left(10x-x^2-30\right)\left(10x+x^2+25\right)<0.$$

Решение. $10x+x^2+25=(x+5)^2$. Трёхчлен $10x-x^2-30$ имеет отрицательный дискриминант (проверьте!), поэтому исходное неравенство равносильно следующему: $-\left(x-(-5)\right)^5\left(x-(-3)\right)^2<0$. Имеем рисунок:



Ответ: $x\in(-5;-3)\cup(-3;+\infty)$.

Изложенный выше метод решения рациональных неравенств носит название *метод интервалов.*

Важно: 1) не ошибиться в постановке первого знака (справа от наибольшего из корней многочлена);

2) не забывать, что знаки чередуются в случае, если множитель $x-a_i$ входит в разложение многочлена в нечётной степени, и повторяются, если в чётной;

3) при решении нестрогого неравенства для дроби нули числителя входят в ответ, а нули знаменателя не входят.

Задача 17. Решите неравенство

$$\frac{x^2(x+2)^4(x+1)^6(x-1)}{(x+6)(x-4)(3-x)(2-x)(x-1)^3} \geq 0.$$

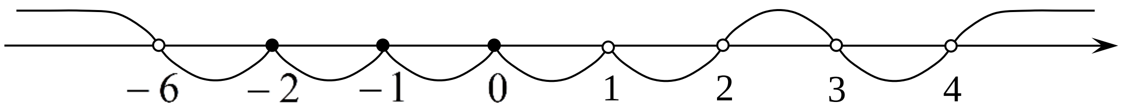
Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2(x+2)^4(x+1)^6(x-1)^4(x+6)(x-4)(3-x)(2-x) \geq 0, \\ (x+6)(x-4)(3-x)(2-x)(x-1)^3 \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем её в виде:

$$\begin{cases} (x-(-6))(x-(-2))^4(x-(-1))^6(x-0)^2(x-1)^4(x-2)(x-3)(x-4) \geq 0, \\ x \neq -6, x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3, x \neq 4. \end{cases}$$

Изобразим на оси нули многочлена и расставим знаки справа налево, начиная со знака «+».



Ответ: $x \in (-\infty;-6) \cup \{-2\} \cup \{-1\} \cup \{0\} \cup (2;3) \cup (4;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $(x-2)(x-3)(x-12) > 0$;
2. $x^3 - 25x \leq 0$;
3. $\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)^2} \leq 0$;
4. $(8-x)(1+x)^2(10-x)^3 \leq 0$;
5. $x^2 + 1 < 3x - x^2 - 3$;
6. $(x+3)(3x-2)^2(7-x)(5x+8)^2 < 0$;
7. $(7-x^2)(x-1)^2(x^2-8x+16) \geq 0$.

Ответы

1. $(2;3) \cup (12;+\infty)$; **2.** $(-\infty;-5] \cup [0;5]$; **3.** $[-3;-1) \cup (-1;2]$; **4.** $\{-1\} \cup [8;10]$; **5.** Нет решений; **6.** $(-\infty;-3) \cup (7;+\infty)$; **7.** $\{4\} \cup \left[-\sqrt{7};\sqrt{7}\right]$.