Тема 5
Рациональные системы уравнений

Система уравнений вида $\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \\ F_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases}$ где $F_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, ..., k,$ – некоторые многочлены, называется *системой рациональных уравнений с n неизвестными.* Решить систему – значит найти набор значений неизвестных, при подстановке которого вместо неизвестных каждое уравнение превращается в верное равенство.

Одним из основных методов решения алгебраических систем является *метод подстановки.*

Задача 24. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения $x = y - 1$. Подставляя это выражение вместо x в первое уравнение, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 2(y-1)^2 - y(y-1) + 3y^2 - 7(y-1) - 12y + 1 = 0, \\ x = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 11y + 5 = 0, \\ x = y - 1. \end{cases}$$

Решая первое уравнение, получим $y_1 = 5,\ y_2 = \frac{1}{2}$. Подставляя эти значения во второе уравнение, найдём $x_1 = 4,\ x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $(4;5), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Иногда, прежде чем воспользоваться методом подстановки, бывает удобно преобразовать систему.

Задача 25. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13. \end{cases}$

Решение. Вычитая из второго уравнения первое, получим систему, равносильную данной: $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ x - y = 3. \end{cases}$ Решая эту систему методом подстановки, получаем

Ответ: $(5;2), (-2;-5)$.

При решении систем уравнений часто используют замену переменных.

Задача 26. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$

Решение. Перепишем систему в виде $\begin{cases} xy(x + y) = 6, \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$ и сделаем замену $u = xy, v = x + y$. Получим систему $\begin{cases} uv = 6, \\ u + v = 5 \end{cases}$. Эту систему можно решить методом подстановки, но можно и проще: легко заметить, что уравнения системы напоминают теорему Виета о корнях приведенного квадратного уравнения, то есть мы можем утверждать, что u и v являются корнями уравнения $t^2 - 5t + 6 = 0$. В данном случае имеем две возможности: $u = 2, v = 3$ или $u = 3, v = 2$. Получаем две системы:

$$\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} xy = 3, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Решая первую (используя наблюдение о теореме Виета), получаем решения исходной системы: (1;2) и (2;1). Вторая система не имеет решений, так как соответствующее ей квадратное уравнение $t^2 - 2t + 3 = 0$ имеет отрицательный дискриминант.

Ответ: $(1;2), (2;1)$.

Рассмотрим ещё один, более сложный, пример решения с помощью замены.

Задача 27. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} v-u=1, \\ w-v=1, \\ (u-1)^3+(v-2)^3+(w-3)^3=3. \end{cases}$$

Решение. Прибавляя к обеим частям первого уравнения $u-2$, а к обеим частям второго уравнения $v-3$, получим

$$\begin{cases} v-2=u-1, \\ w-3=v-2, \\ (u-1)^3+(v-2)^3+(w-3)^3=3. \end{cases}$$

Полагая $t=u-1=v-2=w-3$, получим $3t^3=3$, отсюда $t=1$. Следовательно, $u=2,\ v=3,\ w=4.$

Ответ: (2;3;4).

При решении систем бывает полезно знание метода решения однородных уравнений. Поясним его на следующем примере.

Задача 28. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

Решение. Умножим обе части первого уравнения на 2 и вычтем из него второе уравнение, получим однородное уравнение с двумя неизвестными: $3x^2-8xy+4y^2=0.$ Решая его, мы найдём несложное соотношение между неизвестными, которое позволит решить исходную систему методом подстановки. Заметим, что пара (0;0), которая обращает это уравнение в верное равенство, не является решением системы, поэтому будем считать, что $y\neq 0$ и разделим обе части на y^2. Получим $3\left(\frac{x}{y}\right)^2-8\left(\frac{x}{y}\right)+4=0$. Делая замену $\frac{x}{y}=t$, имеем квадратное уравнение $3t^2-8t+4=0$. Решим его, используя формулу для чётного второго коэффициента. Имеем $t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm 2}{3}$; $t_1=\frac{2}{3}$, $t_2=2$. Отсюда получаем $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ или $\frac{x}{y}=2$. Выражая из последних равенств одно неизвестное через другое и подставляя в одно из уравнений исходной системы, получим две системы:

$$1)\ \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y, \\ 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}y\right)^2-3\left(\dfrac{2}{3}y\right)\cdot y+y^2=3; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x=2y, \\ 2\cdot(2y)^2-3(2y)\cdot y+y^2=3. \end{cases}$$

Решим каждую из них.

1. Второе уравнение принимает вид $-\dfrac{1}{9}y^2=3$, что невозможно, следовательно, первая система не имеет действительных решений.
2. Из второго уравнения имеем $3y^2=3$, откуда $y=\pm1$. Подставляя в первое уравнение, получим соответствующие значения второго неизвестного $x=\pm2$.

Ответ: (2;1), (–2;–1).

Замечание. При записи ответа в круглых скобках указывают пары (или тройки, если система с тремя неизвестными) чисел, соответствующих значениям неизвестных, взятых в алфавитном порядке, либо записывают ответ в виде $\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=-1. \end{cases}$ Запись вида $x=\pm2,\ y=\pm1$ недопустима, так как не понятно, какие именно пары значений неизвестных удовлетворяют системе (например, будет ли ответом пара $x=2, y=-1$).

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. *Решите системы уравнений*:

1. $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5, \\ x^{-2}+y^{-2}=13; \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5; \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10; \end{cases}$
4. $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y, \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y; \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y-z=2, \\ x+yz+zx=3; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$

Ответы

1.1. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$; **1.2.** $(2;3)$; $(3;2)$;

1.3. $\pm(3;2)$; **1.4.** $\left(-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right)$; $\left(-\frac{5}{24};-\frac{7}{24}\right)$; $\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$;

1.5. $(1;3)$;$(3;1)$; **1.6.** $(1;1;1)$; $(7;-3;-1)$; **1.7.** $\pm(3;2)$; $\pm(3;2)$;$\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.