Кинематика

Криволинейное движение. Равномерное движение по окружности. Простейшей моделью *криволинейного* движения является *равномерное движение по окружности*. В этом случае точка движется по окружности с постоянной по величине скоростью V. Положение точки удобно описывать углом, φ который составляет радиус-вектор точки с некоторой осью, например с осью *OX* (рис. 7).

Угловая скорость. Период и частота обращения. Величиной угловой скорости точки ω при движении по окружности называют отношение приращения угла поворота $\Delta\varphi$ ее радиуса-вектора ко времени Δt, за которое этот поворот произошел. Периодом T движения точки по окружности называют время, за которое точка совершает полный оборот. Частота обращения ν — это величина, обратная периоду. Угловая скорость, частота и период обращения при равномерном движении по окружности связаны между собой соотношениями:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Линейная скорость V движения по окружности выражается через угловую скорость ω и радиус окружности R по формуле

$$V = \omega R$$

Ускорение тела при движении по окружности. При движении тела по окружности вектор скорости изменяется, поэтому у тела существует центростремительное ускорение, направленное по радиусу окружности к ее центру и по модулю равное

$$a = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

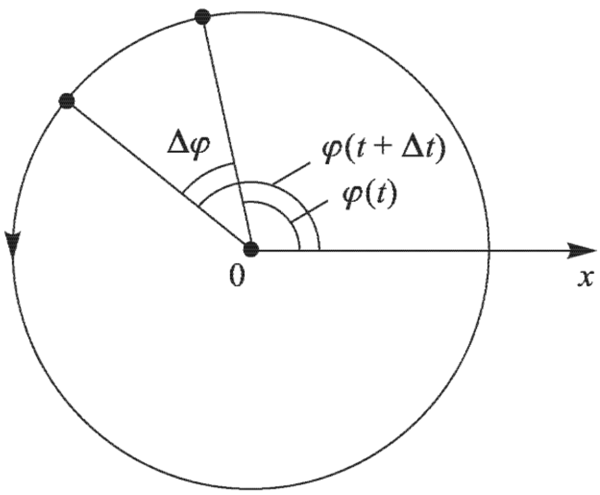


Рисунок 1. Движение материальной точки по окружности

Тангенциальное и нормальное ускорения. При криволинейном движении точки часто бывает удобно разложить ее ускорение на две составляющие (рис. 8):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{\tau} a_\tau + \vec{n} a_n$$

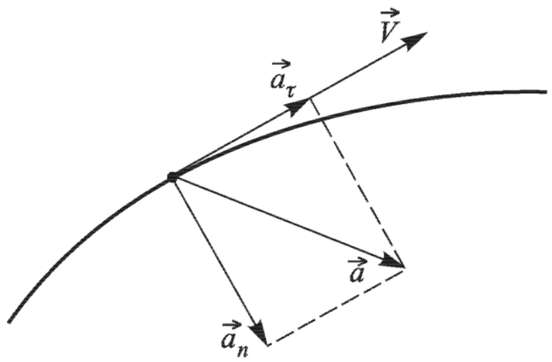


Рисунок 2. Тангенциальная и нормальная составляющие вектора

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор, направленный по касательной к траектории в данной точке, $\vec{n}$ — единичный вектор по нормали к траектории, направленный к центру кривизны. Составляющая $\vec{a}_\tau$ вектора ускорения, направленная по касательной к траектории, называется тангенциальным (касательным) ускорением. Тангенциальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по модулю. Вектор $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону движения точки при возрастании ее скорости и в противоположную сторону — при убывании скорости. Составляющая $\vec{a}_n$ вектора ускорения, направленная по нормали к траектории в данной точке, называется нормальным ускорением. Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению при криволинейном движении. Величины тангенциального и нормального ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \dot{V} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}, \qquad a_n = \frac{V^2}{R},$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке. При движении точки по окружности нормальное ускорение совпадает с центростремительным ускорением.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Свободным падением называется движение, которое совершает тело только под действием притяжения Земли, без учета сопротивления воздуха. Ускорение $\vec{g}$, с которым движется вблизи поверхности Земли материальная точка, на которую действует только сила тяжести, называется ускорением свободного падения. Ускорение свободного падения не зависит от массы тела.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета. При описании движения тела у поверхности Земли удобно выбрать систему координат так, чтобы одна из координатных осей (обычно ось *OX*) была направлена горизонтально, а другая (обычно *OY*) — вертикально (рис.9). Тогда движение по оси *OX* будет равномерным, а по оси *OY* — равнопеременным. В большинстве задач начало координат удобно совместить с точкой, откуда тело начинает движение.

Для тела, брошенного от поверхности Земли со скоростью $\vec{V}_0$ под углом α к горизонту, в системе координат, изображенной на рис.9,

$$x(t) = V_0 \cos\alpha\, t, \qquad y(t) = V_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$$

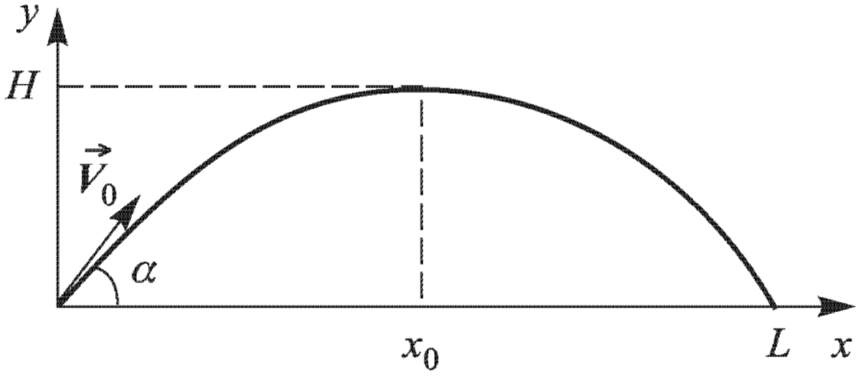


Рисунок 3. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Исключая из этих соотношений время *t*, получаем уравнение траектории тела

$$y(x) = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

которое является уравнением параболы. В точке с координатой

$$x_0 = \frac{V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

тело достигает наибольшей высоты

$$y(x_0) \equiv H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$L = 2x_0 = \frac{2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

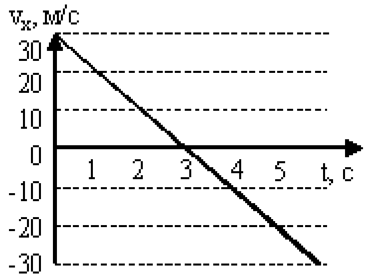
Величины

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{и} \quad H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

называются, соответственно, дальностью и высотой полета.

Пример 1

Стрела пущена вертикально вверх. Проекция ее скорости на вертикальное направление меняется со временем согласно графику на рисунке. В какой момент времени стрела достигла максимальной высоты?



Решение:

Стрела находится в свободном падении, то есть движется с ускорением свободного падения, направленным вертикально вниз. При этом скорость уменьшается и в верхней точке равна нулю. Следовательно, момент времени, когда стрела будет в верхней точке равен 3с.

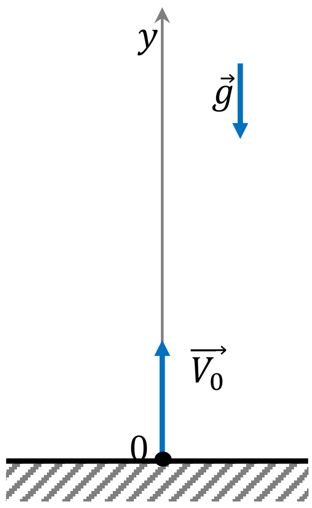
Ответ: 3с.

Пример 2

Камень, брошенный вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью 20°м/с, упал обратно на Землю. Сопротивление воздуха мало. Найти время полёта камня.

Решение:

Для описания движения камня помещаем начало координат на поверхности земли, совмещая с телом, ось y выбираем вертикально вверх. Камень летит свободно – с ускорением свободного падения $\vec{g}$, направленным вертикально вниз.



Напишем зависимость координаты y от времени t.

$$y = V_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Вектор начальной скорости $\vec{V_0}$ направлен по оси y, поэтому берем со знаком «+».

Вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$ направлен в противоположную сторону оси y, поэтому берём со знаком «-».

За время полёта камень снова окажется на поверхности земли, то есть координата $y = 0$. Следовательно:

$$V_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0$$

$$t \cdot \left(V_0 - \frac{g \cdot t}{2}\right) = 0$$

Так как время полёта не равно нулю, приравняем к нулю скобку:

$$V_0 - \frac{g \cdot t}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{2V_0}{g} = \frac{2 \cdot 20}{10} = 4 \text{ (c)}$$

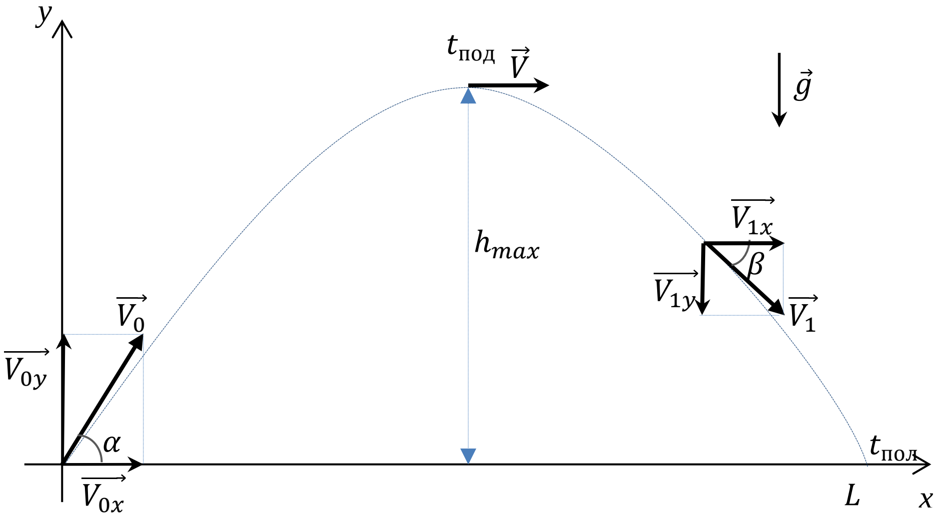
Ответ: $t = 4$ с.

Пример 3.

Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. Найти дальность L полёта и максимальную высоту h_{max}.

На примере этой задачи рассмотрим алгоритм решения подобных задач.

1. Сделаем рисунок.



2. Зададим оси координат.

Начало координат и направление осей выбираем исходя из условия задачи.

В нашем случае, начало координат совпадает с точкой бросания, ось x направляем горизонтально, ось y вертикально.

3. Записываем законы по которым изменяются координаты тела и проекции скорости с течением времени по общим формулам:

$$x = x_0 + V_{0x} \cdot t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$V_x = V_{0x} + a_x t$$

Знаки перед V_{0x} и a_x зависят от их направления относительно оси: сонаправленные «+», иначе «-».

В нашем случае, координата тела по оси x будет изменяться следующим образом:

$x_0 = 0$, потому что так выбрали положение начала координат;

$V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha$, так как V_{0x} – прилежащий катет;

проекция вектора $\vec{g}$ на ось x равна нулю, потому что $\vec{g} \perp Ox$;

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$V_x = V_0 \cos\alpha$$

Аналогично для оси y:

$V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha$, так как V_{0y} – противолежащий катет;

проекция вектора $\vec{g}$ на ось y равна $-g$, потому что $\vec{g} \uparrow\downarrow Oy$;

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$V_y = V_0 \sin\alpha - g \cdot t$$

В результате получаем систему уравнений с помощью, которой можно найти всё касающееся данного движения:

$$\begin{cases} x = V_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \\ V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = V_0 \sin\alpha - g \cdot t \end{cases}$$

4. Найдём максимальную высоту.

Для того чтобы тело достигло верхней точки пройдёт время $t = t_{\text{под}}$. В этот момент времени вектор скорости $\vec{V}$ будет направлен горизонтально и его проекция на ось y будет равна нулю:

$$V_y(t_{\text{под}}) = 0$$

$$V_0 \sin\alpha - g \cdot t_{\text{под}} = 0 \;\Rightarrow\; t_{\text{под}} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

А высота определяется по оси y, следовательно:

$$h_{max} = y(t_{\text{под}}) = V_0 \sin\alpha \cdot t_{\text{под}} - \frac{g{t_{\text{под}}}^2}{2} = V_0 \sin\alpha \cdot \frac{V_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g(V_0 \sin\alpha)^2}{2g^2}$$
$$= \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{g} - \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g} = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

5. Найдём дальность полёта.

Когда тело упадёт $t = t_{\text{пол}}$ и $y(t_{\text{пол}}) = 0$, тогда:

$$V_0 \sin\alpha \cdot t_{\text{пол}} - \frac{g{t_{\text{пол}}}^2}{2} = 0$$

$$t_{\text{пол}} \cdot \left(V_0 \sin\alpha - \frac{gt_{\text{пол}}}{2}\right) = 0$$

$$t_{\text{пол}} \neq 0 \;\Rightarrow\; V_0 \sin\alpha - \frac{gt_{\text{пол}}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; t_{\text{пол}} = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$$

Дальность полёта определяется по оси x, следовательно:

$$L = x(t_{\text{пол}}) = V_0 \cos\alpha \cdot t_{\text{пол}} = V_0 \cos\alpha \cdot \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{{V_0}^2 \sin 2\alpha}{g}$$

6. Найдём гол наклона β вектора скорости $\overrightarrow{V_1}$ к горизонту в любой момент времени.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V_{1y}}{V_{1x}} = \frac{V_0 \sin\alpha - g \cdot t}{V_0 \cos\alpha} \Rightarrow \beta = arc\operatorname{tg}\left(\frac{V_0 \sin\alpha - g \cdot t}{V_0 \cos\alpha}\right)$$

Пример 4.

Автомобиль движется по закруглению дороги радиусом 20 м с центростремительным ускорением 5 м/с^2. Найдите скорость автомобиля.

Решение:

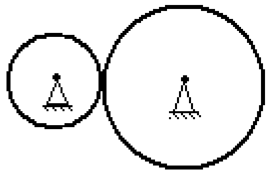
Запишем формулу для центростремительного ускорения.

$$a = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{a \cdot R} = \sqrt{5 \cdot 20} = 10 \text{ (м/с)}$$

Ответ: $V = 10$ м/с.

Пример 5.

Две шестерни, сцепленные друг с другом, вращаются вокруг неподвижных осей (см. рисунок). Большая шестерня радиусом 10 см делает 20 оборотов за 10 с, а частота обращения меньшей шестерни равна 5 с$^{-1}$. Каков радиус меньшей шестерни? Ответ укажите в сантиметрах.



Дано:

$r_1 = 0{,}1$ м

$N_1 = 20$

$t_1 = 10$ с

$n_2 = 5$ с$^{-1}$

$r_2 - ?$

СИ

Решение:

Так как шестерни сцеплены, то их линейные скорости в точке соприкосновения должны быть одинаковы.

$$V = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

$$\omega_1 = 2\pi n_1; \ \omega_2 = 2\pi n_2$$

$$2\pi n_1 \cdot r_1 = 2\pi n_2 \cdot r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{n_1 \cdot r_1}{n_2}$$

$$n_1 = \frac{N_1}{t_1} \Rightarrow r_2 = \frac{N_1 \cdot r_1}{t_1 \cdot n_2} = \frac{20 \cdot 0{,}1}{10 \cdot 5} = 0{,}04 \text{ (м)}$$

Ответ: $r_2 = 4$ см.

Задания для самостоятельного решения

1. Камень, брошенный вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью 30°м/с, упал обратно на Землю. Сопротивление воздуха мало. Найти время полёта камня.
2. Материальная точка движется по окружности радиусом R со скоростью V. Как нужно изменить скорость её движения, чтобы при увеличении радиуса окружности в 2 раза центростремительное ускорение точки осталось прежним?
3. Тело, брошенное со скоростью V под углом α к горизонту, в течение времени t поднимается на максимальную высоту h над горизонтом. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно определить.

   К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ	
А) время подъёма t на максимальную высоту Б) максимальная высота h над горизонтом	1.	$\frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}$
	2.	$\frac{V^2\cos^2\alpha}{2g}$
	3.	$\frac{V^2\sin 2\alpha}{g}$
	4.	$\frac{V\sin\alpha}{g}$

4. Точка движется по окружности радиусом R с частотой обращения ν. Как нужно изменить частоту обращения, чтобы при увеличении радиуса окружности в 4 раза центростремительное ускорение точки осталось прежним?
5. Найти линейную скорость Луны, обусловленную ее обращением вокруг Земли. Период вращения Луны Т = 27,3 суток. Расстояние Земля—Луна $R = 3{,}84\cdot10^5$ км.
6. Корабль-спутник «Восток-5» с космонавтом Николаевым на борту совершил N = 64 оборота вокруг Земли за t = 95 ч. Определить среднюю скорость полета v. Орбиту корабля можно считать круговой и отстоящей от поверхности Земли на h = 230 км, радиус Земли 6400 км.
7. Диск равномерно вращается относительно оси, проходящей через его центр и ему перпендикулярной. Линейная скорость точек края диска v_1 = 3 м/с. У точек, расположенных на расстоянии l = 10 см ближе к оси, скорость v_2 = 2 м/с. Какова частота n вращения диска?

Ответы:

1. 6 с.

2. увеличить в 1,73 раза.

3. А-4, Б-1.

4. уменьшить в 2 раза.

5. 1022 м/с.

6. 7,8 км/с/

7. 1,59 об/с.