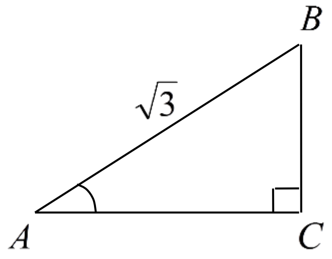
Тема 15

Решение геометрических задач с применением тригонометрии

Задача 1. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, угол *A* равен 30°, $AB = \sqrt{3}$. Найдите *AC*.

Решение.



Согласно геометрическому определению косинуса, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$. Отсюда $AC = AB \cdot \cos A = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

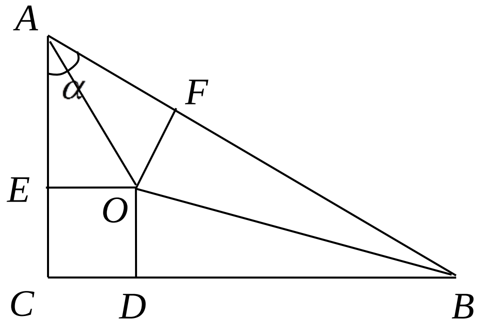
Ответ: $1{,}5$.

Задача 2. Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найти отношение радиуса вписанной в треугольник окружности к радиусу описанной окружности. При каком значении α отношение будет наибольшим?

Решение.

Дано: ΔABC –- прямоугольный, $\angle A = \alpha$, O – центр вписанной окружности, $OE \perp AC,\ OD \perp BC,\ OF \perp AB,\ OE = OD = OF = r$, $AB = 2R$.

Найти: $\dfrac{r}{R}$.



Центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис треугольника. Центр описанной около прямоугольного треугольника лежит в середине гипотенузы.

Поскольку D, E, F – точки касания вписанной окружности, то $AE = AF, BF = BD, CD = CE = OE = OD$ ($\angle C$ – прямой).

Из ΔAOE находим $AE = OE \cdot \operatorname{ctg}\angle OAE = r \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, аналогично из ΔOFB $BF = OF \cdot \operatorname{ctg}\angle OBF = r \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Тогда $AB = 2R = AF + BF = r\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\right) =$

$$= r\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = r\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{r}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{r\sqrt{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Отношение $\dfrac{r}{R} = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Чтобы узнать, при каком значении α отношение будет наибольшим, перепишем результат в виде $\dfrac{r}{R} = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\dfrac{\pi}{4}\right)$. Наибольшее значение получаем, если $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, то есть при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

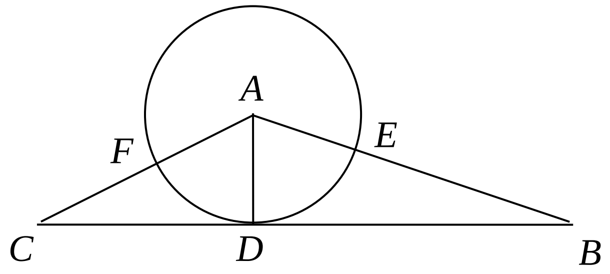
Ответ: $\dfrac{r}{R} = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$; данное отношение наибольшее значение принимает при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 3. Основание треугольника равно a, а прилежащие к нему углы содержат $45°$ и $15°$. Из вершины, противоположной основанию, проведена окружность радиусом, равным высоте, опущенной на это основание. Найти площадь части соответствующего круга, заключённой внутри треугольника.

Решение.

Дано: $BC = a, \angle B = 15°, \angle C = 45°, AD$ – высота.

Найти: площадь S кругового сектора A.



Угол при вершине A равен $180° - (15° + 45°) = 120°$. По теореме синусов $\frac{a}{\sin 120°} = \frac{AC}{\sin 15°}$, отсюда $AC = \frac{a \sin 15°}{\sin 120°} = \frac{2a \sin 15°}{\sqrt{3}}$.

Треугольник ΔADC прямоугольный $(AD \perp BC)$ и равнобедренный $(\angle C = 45°)$, следовательно, $AD = AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\sin 15°}{\sqrt{3}}$.

Площадь сектора с углом в $120°$ составляет третью часть от площади круга. Итак, искомая площадь $S = \frac{\pi \cdot AD^2}{3} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot 2\sin^2 15°}{3 \cdot 3}$.

Имеем $2\sin^2 15° = 1 - \cos 30° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$. Тогда $S = \frac{\pi a^2 \left(2-\sqrt{3}\right)}{18}$.

Ответ: $\frac{\pi a^2 \left(2-\sqrt{3}\right)}{18}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 15, а $\cos A = \frac{4\sqrt{14}}{15}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.
2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 2, а высота, проведенная к основанию, равна $\sqrt{3}$. Найдите косинус угла A.
3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 10$, $AC = 4\sqrt{6}$. Найдите $\sin A$.
4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 65$, $BC = 52$. Найдите $\cos A$.
5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 6$, $BC = 3\sqrt{3}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.
6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 10$, $BC = 8$. Найдите $\sin B$.
7. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $BC = 12$, $AB = 2\sqrt{61}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A

8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 13$, $AC = 5$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

9. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $BC = 9$. Найдите AB.

10. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos B = \frac{8}{17}$, $AB = 17$. Найдите AC.

11. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos B = \frac{7}{25}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

12. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = 0{,}1$, $AC = 6\sqrt{11}$. Найдите AB.

13. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{9}{40}$, $BC = 7{,}2$. Найдите AB.

14. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{24}{7}$. Найдите $\sin A$.

15. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH – высота, $AB = 49$, $\cos A = \frac{5}{7}$. Найдите AH.

16. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH – высота, $AB = 9$, $\sin A = \frac{1}{2}$. Найдите BH.

17. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH – высота, $AC = 10$, $AH = \sqrt{51}$. Найдите $\cos B$.

18. В треугольнике ABC угол С равен $90°$, $\sin A = 0{,}6$, $AB = 5$, CH – высота. Найдите AH.

19. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 5$, CH – высота, $AH = 3$. Найдите синус угла ACB.

20. В тупоугольном треугольнике ABC $AB=BC$, $AC=6$, высота CH равна 3. Найдите синус угла ACB.

21. В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{2}$, угол C равен $135°$. Найдите высоту AH.

22. В треугольнике ABC $AC=BC$, AB=15, AH – высота, BH=3. Найдите $\cos A$.

23. В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=27$, $\cos A=0{,}96$. Найдите AC.

24. В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=70$, $\cos A=\frac{35}{37}$. Найдите высоту CH.

25. В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=3$, $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите AC.

26. В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=4$, высота AH равна $\sqrt{7}$. Найдите $\cos A$.

27. В треугольнике ABC $AC=BC=12$, $AB=18$. Найдите $\cos A$.

28. В треугольнике ABC $AC=BC=12$, $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите AB.

Ответы

1. 1; **2.** 0,5; **3.** 0,2; **4.** 0,6; **5.** –0,5; **6.** 0,6; **7.** –1,2; **8.** 2,4; **9.** 10; **10.** 15; **11.** –0,96; **12.** 20; **13.** 7,38; **14.** 0,96; **15.** 25; **16.** 2,25; **17.** 0,7; **18.** 3,2; **19.** 0,6; **20.** 0,5; **21.** 2; **22.** **0,**2; **23.** 14,0625; **24.** 12; **25.** 3; **26.** 0,75; **27.** 0,75; **28.** 9,6.