Тема 16
Планиметрия на ЕГЭ

Планиметрические задачи встречаются в вариантах ЕГЭ как в первой, так и во второй части. Это задания B5, B8 и C4. Умение решить задачу по планиметрии необходимо также для успешного решения задач по стереометрии: B10, B13, C2. Здесь представлены примеры таких задач с решениями. Рекомендуется решить каждую задачу самостоятельно, а затем проверить своё решение. Задачи 1-8 относятся к заданиям части B, задачи 9-14 – к части C.

Задача 1.

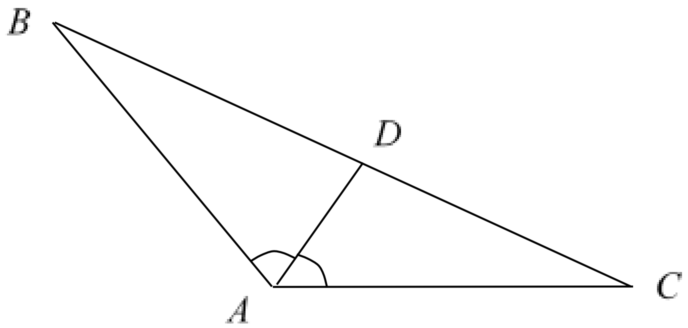
В треугольнике ABC угол BAC равен 110°, AD – биссектриса угла A, угол C меньше угла ADC в три раза. Найдите градусную меру угла B.

Решение. В треугольнике ABC угол DAC равен 55°, так как AD – биссектриса угла A, следовательно

$\angle C + \angle ADC = 125^\circ \Rightarrow 4 \cdot \angle C = 125^\circ \Rightarrow \angle C = 31{,}25^\circ$.

В треугольнике ABC

$\angle B = 180^\circ - (\angle BAC + \angle C) = 180^\circ - 141{,}25^\circ = 38{,}75^\circ$.



Ответ: $38{,}75^\circ$.

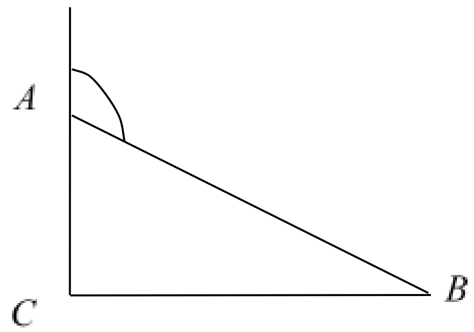
Задача 2.

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 25$, $BC = 24$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

Решение. Заметим, что внешний угол треугольника – это угол, смежный с внутренним углом, поэтому его косинус отличается от косинуса внутреннего угла знаком. Найдём косинус угла A треугольника ABC.

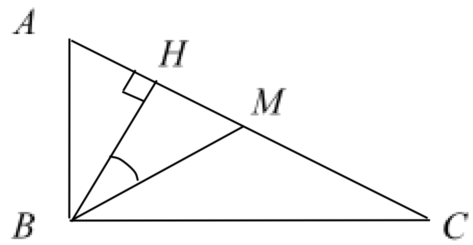
По теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 7 \Rightarrow \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{25} = 0{,}28.$$



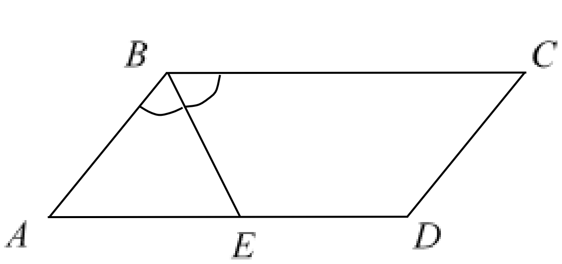
Ответ: –0,28.

Задача 3.
В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен $20°$. Найдите градусную меру большего из острых углов этого треугольника.
Решение. В прямоугольном треугольнике BHM $\angle BMH = 70°$, и этот угол является внешним для треугольника $BMC \Rightarrow \angle MBC + \angle C = 70° \Rightarrow \angle C = 35°$, так как треугольник BMC равнобедренный. Следовательно, $\angle A = 55°$.



Ответ: 55.

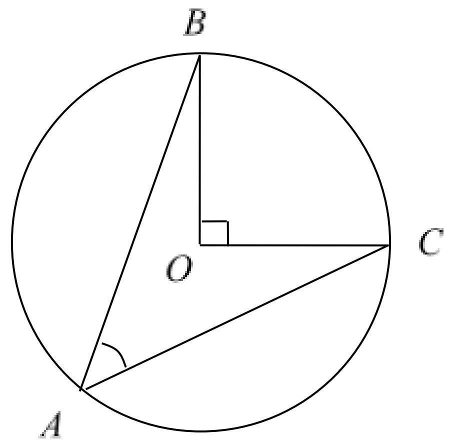
Задача 4.
Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 6:7, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 190.
Решение. Треугольник ABE равнобедренный, следовательно, отношение сторон параллелограмма $AB : AD = 6 : 13$. Отсюда $AD = \frac{190}{38} \cdot 13 = 65$.



Ответ: 65.

Задача 5. Найдите длину хорды, на которую опирается угол $45°$, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{2}$.

Решение. Центральный угол, опирающийся на ту же хорду, вдвое больше вписанного, поэтому $BC = OB \cdot \sqrt{2} = 2$.



Ответ: 2.

Задача 6. В треугольнике ABC угол C равен $60°$, $AB = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

Решение. По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 5 \sin 60°} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: 0,2.

Задача 7.

В треугольнике ABC угол C равен $82°$, биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке O. Найдите градусную меру угла AOB.

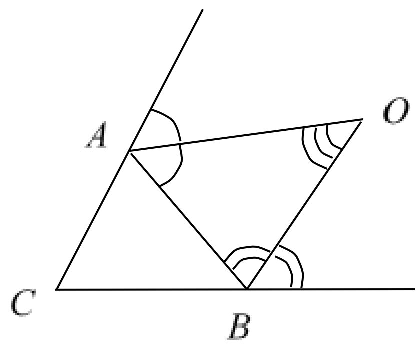
Решение. Сумма внутренних углов треугольника

$\angle A + \angle B = 180° - 82° = 98°$.

Сумма соответствующих внешних углов равна $360° - 98° = 262°$.

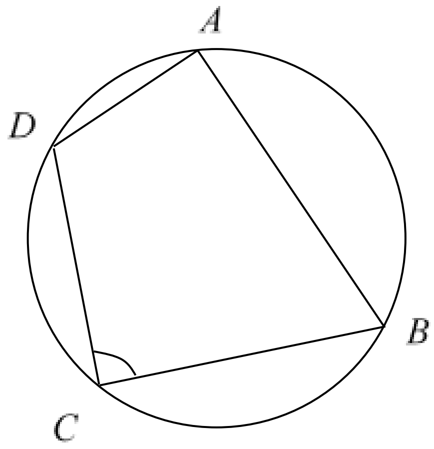
Сумма их половин вдвое меньше, то есть

$\angle OAB + \angle OBA = 131° \;\Rightarrow\; \angle AOB = 180° - 131° = 49°$.



Ответ: 49.

Задача 8.
Точки $A, B, C, D,$ расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD, градусные меры которых относятся соответственно как $6:3:4:2$. Найдите градусную меру угла C четырёхугольника $ABCD$.
Решение. Искомый угол – вписанный, опирается на дугу DAB, равную сумме дуг AD и AB, что составляет $\frac{8}{15}$ градусной меры окружности, то есть $\frac{360°\cdot 8}{15} = 24°\cdot 8$. Отсюда $\angle C = \frac{24°\cdot 8}{2} = 24°\cdot 4 = 96°$.

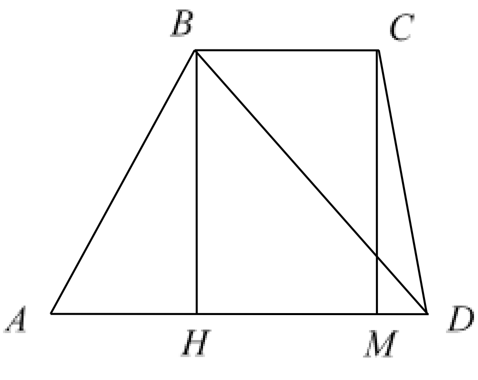


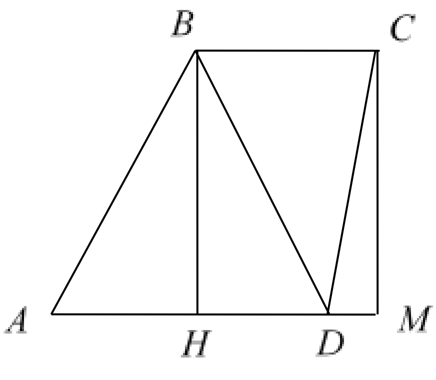
Ответ: 96.
Задача 9.
В трапеции $ABCD$ известны боковые стороны $AB = 36, CD = 34$ и верхнее основание $BC = 10$. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

Решение.

Заметим, что возможны 2 случая: в трапеции углы при верхнем основании оба тупые или угол B тупой (так как его косинус отрицательный), а угол C острый.

Опустим высоты трапеции BH и CM.





В прямоугольном треугольнике ABH

$$\cos A = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow BH = AB \cdot \sin A = 24\sqrt{2}.$$

В прямоугольном треугольнике CMD

$$MD = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{34^2 - 2 \cdot 24^2} = 2\sqrt{17^2 - 2 \cdot 12^2} = 2.$$

Поскольку $HM = BC$, получаем в первом случае

$$BD = \sqrt{2 \cdot 24^2 + 12^2} = 12\sqrt{2 \cdot 2^2 + 1} = 12 \cdot 3 = 36;$$

во втором случае

$$BD = \sqrt{2 \cdot 24^2 + 8^2} = 8\sqrt{2 \cdot 3^2 + 1} = 8\sqrt{19}.$$

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

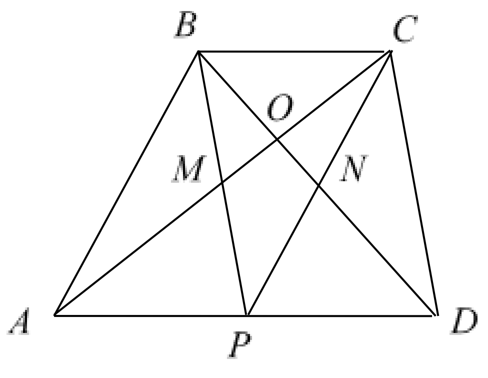
Задача 10.

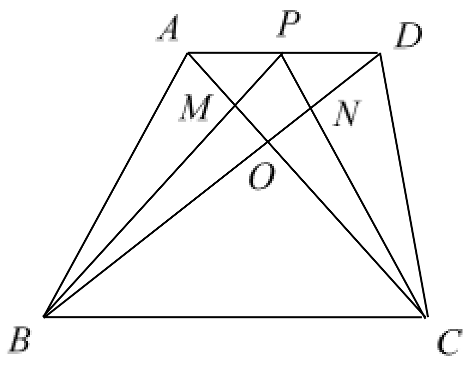
Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

Решение.

Пусть a – меньшее основание трапеции, $2a$ – большее основание, h – высота трапеции. Тогда площадь трапеции $\dfrac{a+2a}{2} \cdot h = 90 \Rightarrow ah = 60$.

Возможны 2 случая: 1) AD – большее основание, 2) AD – меньшее основание.





В любом случае искомая площадь

$$S_{OMPN} = S_{ACP} - S_{CON} - S_{AMP} = S_{ACP} - S_{BCN} - S_{BOC} - S_{AMP} =$$
$$= S_{ACP} - S_{BCN} + S_{BOC} - S_{AMP}$$

В обоих случаях имеем пары подобных треугольников: ΔAMP и ΔBMC; ΔBCN и ΔPND; ΔBOC и ΔAOD.

В случае 1) $S_{ACP} = \dfrac{1}{2}ah = 30$;

$$S_{AMP} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} ah = 15;$$

$$S_{BCN} = \frac{1}{4} ah = 15;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{h}{3} = \frac{1}{6} ah = 10.$$

Следовательно, $S_{OMPN} = 30 - 15 + 10 - 15 = 10$.

В случае 2) $S_{ACP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h = \frac{1}{4} ah = 15;$

$$S_{AMP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{5} = \frac{1}{20} ah = 3;$$

$$S_{BCN} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{4}{5} h = \frac{4}{5} ah = 48;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} ah = 40.$$

Следовательно, $S_{OMPN} = 15 - 48 + 40 - 3 = 4$.

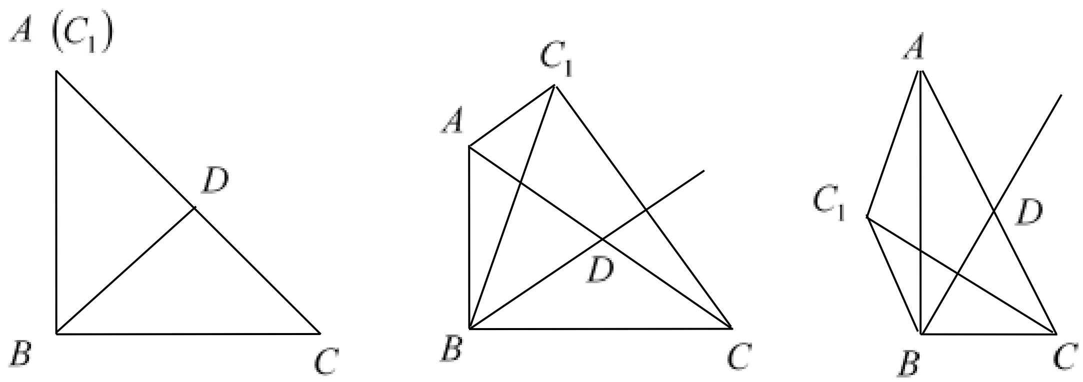
Ответ: 10 или 4.

Задача 11.

Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом α при вершине A. Точка D - середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B.

Решение.

Заметим, что при $\alpha = 45°$ задача не имеет смысла, так как медиана BD является высотой, и точки A и C симметричны относительно BD, то есть C_1 совпадает с A.



Получаем 2 случая: 1) $\alpha > 45°$; 2) $\alpha < 45°$.
В обоих случаях получаем равные отрезки: $AD = CD = BD = C_1D$.
Следовательно, точки $A,\ B,\ C,\ C_1$ лежат на одной окружности с центром в точке D.
Искомый угол AC_1B – вписанный, опирается на дугу AB и, следовательно, равен половине этой дуги.
В случае 1) $\angle AC_1B = \angle ACB = 90° - \alpha$;
в случае 2)
$\angle AC_1B + \angle ACB = 180° \Rightarrow \angle AC_1B = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$.

Ответ: $90° - \alpha$ или $90° + \alpha$.

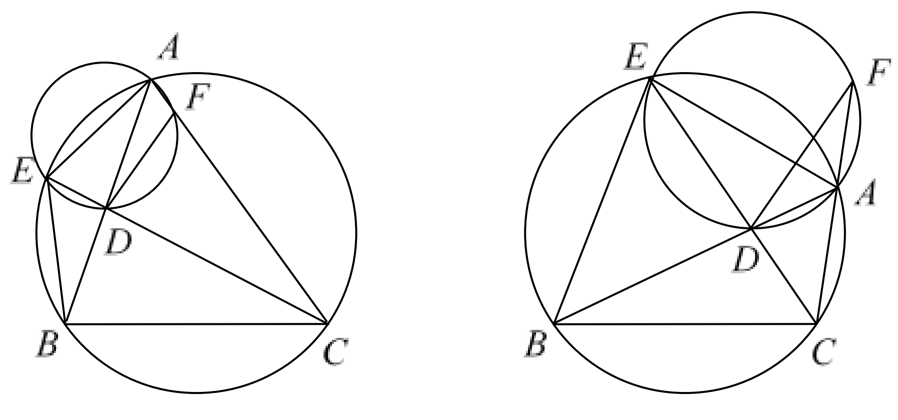
Задача 12. Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 6$, $AF = 3$, угол $BAC = 45°$.

Решение.

Возможны два случая:

1) точка F лежит между A и C;

2) точка A лежит между F и C.



В первом случае $\angle DFC = 180° - \angle AFD = \angle AEC = \angle ABC$.
Следовательно, $\Delta BDC = \Delta FDC$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).
Тогда $BC = FC = AC - AF = 3$, и, по теореме синусов, диаметр описанной окружности $2R = \dfrac{BC}{\sin \angle BAC} = \dfrac{3}{\sin 45°} = 3\sqrt{2} \ \Rightarrow\ R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Во втором случае $\angle AFD = \angle AEC = \angle ABC$. Следовательно, $\Delta BDC = \Delta FDC$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).
Тогда $BC = FC = AC + AF = 9$, и, по теореме синусов, диаметр описанной окружности $2R = \dfrac{BC}{\sin \angle BAC} = \dfrac{9}{\sin 45^\circ} = 9\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ или $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$**.**

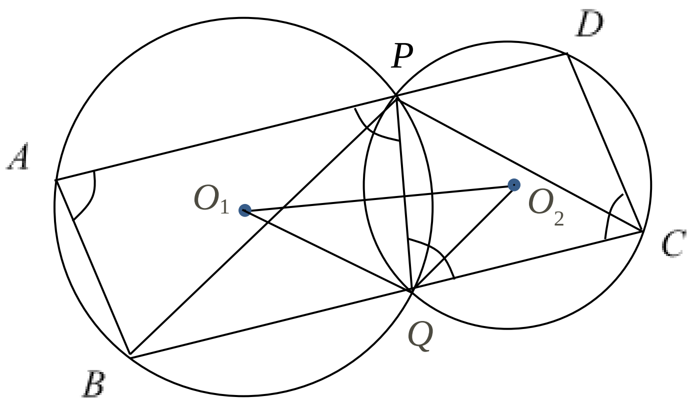
Задача 13.

Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую – в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C.

а) Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности в два раза больше радиуса второй окружности.

Решение.



а) Заметим, что дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны, а также что хорды, стягивающие равные дуги, также равны.

В нашем случае это означает, что $APQB$ и $PDCQ$ – равнобедренные трапеции, следовательно, отрезки AB и CD равны. Поскольку $\angle APQ = \angle CQP$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей PQ, $\angle APQ = \angle BAP$, $\angle DCQ = \angle CQP$ и $\angle BAP + \angle ABC = 180^\circ$, то $\angle DCQ + \angle ABC = 180^\circ$ и, следовательно прямые AB и CD параллельны. Значит, $ABCD$ – параллелограмм.

б) Отношение $BP : PC$ равно отношению радиусов данных окружностей. Это следует из подобия треугольников BPC и O_1QO_2. Действительно, угол

PBQ вписанный, опирается на дугу PQ. Угол O_2O_1Q равен половине центрального угла PO_1Q, опирающегося на ту же дугу. Следовательно, $\angle PBQ = \angle O_2O_1Q$. Аналогично $\angle PCQ = \angle O_1O_2Q$. Значит, треугольники BPC и O_1QO_2 подобны. Тогда $BP : PC = R_1 : R_2 = 2$.

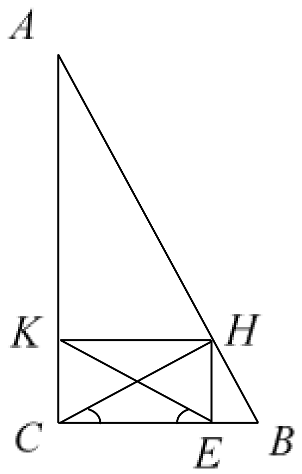
Задача 14.

На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

Решение. а) Выполним чертёж.

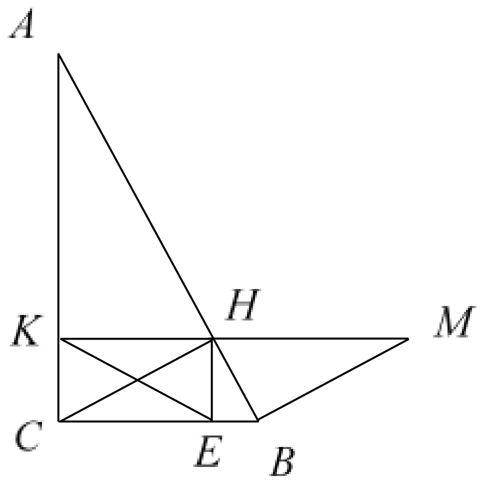


Чтобы доказать, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности, достаточно убедиться в том, что суммы противоположных углов четырёхугольника $ABEK$ равны.

Поскольку CH – высота, $\angle BCH = \angle A$, а $\angle CEK = \angle BCH$, т. к. $CKHE$ – прямоугольник. Тогда $\angle A + \angle BEK = \angle CEK + \angle BEK = 180°$. Значит, и $\angle B + \angle AKE = 180°$.

Следовательно, четырёхугольник $ABEK$ вписанный, что и требовалось доказать.

б) Выполним дополнительное построение: проведём BM параллельно CH, $BM = CH$.



Получим параллелограмм $BCHM$. Поскольку прямые KH и HM параллельны прямой BC и проходят через одну точку, они совпадают, $BM = KE$. Следоватедьно, $KMBE$ – равнобедренная трапеция. Её вершины лежат на окружности, описанной около четырёхугольника $ABEK$, а также около прямоугольного треугольника ABM

$(\angle BMH = \angle A, \angle BHM = \angle AHK \Rightarrow \angle HBM = \angle AKH = 90°)$.

Радиус этой окружности равен половине гипотенузы, т.е. $R = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BM^2} = \frac{1}{2} \cdot 13$.

Ответ: 6,5.