Тема 11
Логарифмические уравнения и неравенства

§1. Понятие логарифма

Пусть дано уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $b > 0$ и $a \neq 1$.

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени *c*, в которую надо возвести данное основание *a*, чтобы получить число *b*. Запись $\log_a b = c$ читается так: логарифм числа b по основанию a равен *c*.

Из равенства $2^5 = 32$ следует, что $\log_2 32 = 5$; из равенства $10^2 = 100$ следует, что $\log_{10} 100 = 2$; из равенства $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ следует, что $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$.

Из определения логарифма следует так называемое *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Например, $2^{\log_2 32} = 32$; $10^{\log_{10} 100} = 100$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 8} = 8$.

Основные свойства логарифма.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

1. $\log_a 1 = 0$ (логарифм единицы равен нулю);

2. $\log_a a = 1$ (логарифм основания равен единице);

3. $a^{\log_a b} = b$ (основное логарифмическое тождество);

4. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел при том же основании);

Замечание. В общем случае приведённое выше правило формулируется так: логарифм произведения нескольких чисел, если оно положительно, равен сумме логарифмов модулей этих чисел, взятых по тому же основанию, то есть

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + \ldots + \log_a |b_n|,\ b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n > 0.$$

5. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел при том же основании);

Замечание. Логарифм частного двух чисел, если оно положительно, равен разности логарифмов модулей делимого и делителя, взятых по тому же основанию, то есть

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|,\ \frac{b}{c} > 0.$$

6. $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$ (логарифм степени равен произведению логарифма основания этой степени на её показатель);

Замечание. Логарифм чётной степени числа, отличного от нуля, равен произведению показателя степени на логарифм модуля её основания, взятый по тому же основанию, то есть

$$\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|,\ n \in \mathbf{Z}.$$

7. $\log_{a^{\alpha}} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b,\ \alpha \neq 0$;

8. $\log_{a^{\alpha}} b^{\alpha} = \log_a b,\ \alpha \neq 0$;

9. $\log_{a^{\alpha}} b^{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b,\ \alpha \neq 0$;

10. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ c \neq 1$ (формула перехода к новому основанию);

11. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a},\ b \neq 1$ (частный случай формулы перехода к новому основанию);

12. $\log_a c \cdot \log_b d = \log_a d \cdot \log_b c,\ b \neq 1$;

13. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$;

14. $\lg b$ – общепринятое написание выражения $\log_{10} b$ (десятичный логарифм); $\ln b$ – общепринятое написание выражения $\log_e b$ (натуральный логарифм), где число $e \approx 2{,}72$.

Нахождение логарифмов заданных чисел или выражений называется операцией *логарифмирования*. Нахождение числа b по заданному значению $\log_a b$ называется *потенцированием*.

Задача 1. Вычислите $\log_{\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}} \frac{1}{16}$.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{16}=2^{-4}$, $\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}=2^{-1+\frac{1}{5}}=2^{-\frac{4}{5}}$. Тогда согласно свойству 7 имеем $\log_{\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}}\frac{1}{16}=\log_{2^{-\frac{4}{5}}}2^{-4}=\frac{-4}{-\frac{4}{5}}\log_2 2=5$.

Ответ: 5.

Задача 2. Вычислите $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

$$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}=-\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}}=-\log_2\frac{1}{8}=-\log_2 2^{-3}=-(-3)=3.$$

Ответ: 3.

Задача 3. Вычислите $4^{\frac{1}{4}\log_2 3+2\log_{16}4}$.

Решение. $4^{\frac{1}{4}\log_2 3+2\log_{16}4}=2^{2\left(\frac{1}{4}\log_2 3+2\cdot\frac{1}{2}\right)}=2^{\frac{1}{2}\log_2 3+2}=2^{\log_2\sqrt{3}}\cdot 2^2=4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задача 4. Упростите выражение $a^{\frac{\lg\lg c}{\lg a}}$.

Решение. Заметим, что $\log_a(\lg c)=\frac{\lg\lg c}{\lg a}$ (воспользовались формулой перехода к новому основанию), тогда $a^{\frac{\lg\lg c}{\lg a}}=a^{\log_a(\lg c)}=\lg c$.

Ответ: $\lg c$.

Задача 5. Известно, что $\log_7 2=a$. Найдите $\log_{1/2}28$.

Решение.

$$\log_{1/2}28=\frac{\log_7 28}{\log_7 1/2}=\frac{\log_7(4\cdot 7)}{\log_7 1-\log_7 2}=\frac{\log_7 4+\log_7 7}{0-a}=\frac{2\log_7 2+1}{-a}=-\frac{2a+1}{a}.$$

Ответ: $-\frac{2a+1}{a}$.

Задача 6. Известно, что $\lg 2=a$, $\lg 13=b$. Найдите $\log_5 3{,}38$.

Решение.

$$\log_5 3{,}38=\frac{\lg 3{,}38}{\lg 5}=\frac{\lg(338:100)}{\lg(10:2)}=\frac{\lg 338-\lg 100}{\lg 10-\lg 2}=$$
$$=\frac{\lg 338-2}{1-a}=\frac{\lg(13^2\cdot 2)-2}{1-a}=\frac{2\lg 13+\lg 2-2}{1-a}=\frac{2b+a-2}{1-a}.$$

Ответ: $\frac{2b+a-2}{1-a}$.

Задача 7. Вычислите $100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}}$.

Решение. Положим $x=100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}}$ и прологарифмируем полученное равенство по основанию 10:

$$\lg x=\lg\left(100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lg x=\left(\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}\right)\cdot\lg 100=\left(\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}\right)\cdot 2=1-2\lg 2^{\frac{1}{2}}=\lg 10-\lg 2=\lg 5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=5.$$

Ответ: 5.

§2. Свойства и график логарифмической функции

Функция вида $y=\log_a x$, где a – положительное число, не равное единице, называется *логарифмической* (таким образом, логарифмическая функция является обратной к показательной функции).

Перечислим основные свойства этой функции.

1) Функция задана на интервале $(0;+\infty)$ (график расположен справа от оси Oy).
2) При любом положительном основании $\log_a 1=0$. Следовательно, график логарифмической функции пересекает ось абсцисс в точке $(1;0)$ при любом $a>0$, $a\neq 1$.
3) Функция является возрастающей при $a>1$ и убывающей при $0<a<1$. Причём, если $a>1$, то $\log_a x<0$ при $0<x<1$ и $\log_a x>0$ при $x>1$; если $0<a<1$, то $\log_a x>0$ при $0<x<1$ и $\log_a x<0$ при $x>1$.
4) Непрерывна на всей области определения $(0;+\infty)$.

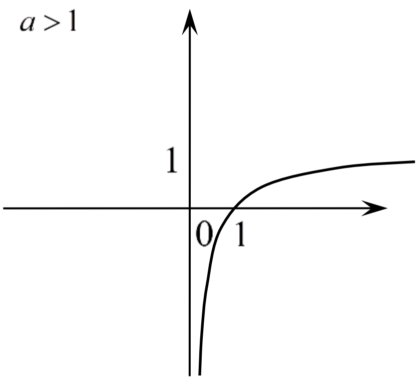
5) Множеством значений функции $y = \log_a x$ является интервал $(-\infty; +\infty)$, то есть логарифмическая функция принимает все действительные значения.

Построим график логарифмической функции при частных значениях основания a.

a. Пусть $a = 2$ и значит $a > 1$. Составим таблицу значений функции $y = \log_2 x$.

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
y	–3	–2	–1	0	1	2	3

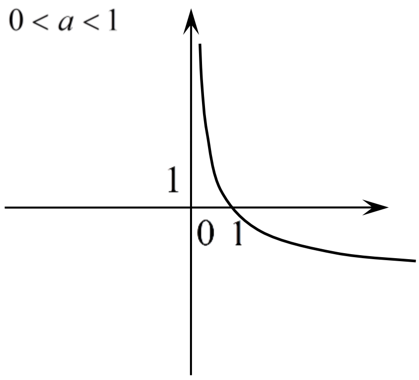
На основании этой таблицы построим график функции $y = \log_2 x$.



b. Пусть $a = \frac{1}{2}$ и значит $0 < a < 1$. Составим таблицу значений функции $y = \log_{1/2} x$.

x	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8
y	–3	–2	–1	0	1	2	3

На основании таблицы построим график функции $y = \log_{1/2} x$.



§3. **Логарифмические уравнения**

Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное только под знаком логарифма или в основании логарифма.

При решении логарифмических уравнений необходимо учитывать ОДЗ: под знаком логарифма могут стоять только положительные величины, в основании логарифма – только положительные величины, отличные от единицы.

Найдём решения простейших логарифмических уравнений:

$$\log_a x = b \quad \Rightarrow \quad x = a^b;$$

$$\log_x c = d \quad \Rightarrow \quad x = c^{\frac{1}{d}},$$

где x – неизвестное, а a, b, c, d – заданные действительные числа.

При решении логарифмических уравнений используются свойства логарифмической функции. Если в процессе решения выполняются некоторые преобразования, необходимо следить за их равносильностью, так как при логарифмировании (или потенцировании) выражений происходит сужение (или расширение) ОДЗ.

Задача 8. Решите уравнение $\lg(x+1{,}5) = -\lg x$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+1{,}5>0, \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$.

$$\lg(x+1{,}5)+\lg x = 0 \Rightarrow \lg(x(x+1{,}5)) = \lg 1 \Rightarrow x(x+1{,}5) = 1 \Rightarrow x^2 + 1{,}5x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \notin \text{ОДЗ}; \quad x_2 = \frac{1}{2} \in \text{ОДЗ}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 9. Решите уравнение $\log_x \frac{1}{16} = 4$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Согласно определению логарифма $x^4 = \frac{1}{16}$. Тогда $|x| = \frac{1}{2}$, и

$$x_1 = -\frac{1}{2} \notin \text{ОДЗ}; \quad x_2 = \frac{1}{2} \in \text{ОДЗ}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 10. Решите уравнение $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x > 0, \\ \log_3 \log_2 x > 0. \end{cases}$

$$\log_7 \log_3 \log_2 x = \log_7 1 \Rightarrow \log_3 \log_2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 \log_2 x = \log_3 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8 \in \text{ОДЗ}.$$

Ответ: 8.

Задача 11. Решите уравнение $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$.

Введём переменную $t = \log_2 x$, получим квадратное уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 3 \Rightarrow \log_2 x = 2,\ \log_2 x = 3 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = 8 \in \text{ОДЗ}.$

Ответ: 4; 8.

Задача 12. Решите уравнение $\log_2 \sqrt{x-1} + 3\log_2 \sqrt{x+1} = \log_2 \sqrt{x^2-1}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x-1} > 0, \\ \sqrt{x+1} > 0, \\ \sqrt{x^2-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x > -1, \\ x < -1,\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$

$$\log_2 (x-1)^{\frac{1}{2}} + 3\log_2 (x+1)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_2 (x-1) + \frac{1}{2}\log_2 (x+1)^3 = \frac{1}{2}\log_2 \left(x^2-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (x-1) + \log_2 (x+1)^3 = \log_2 \left(x^2-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 \left((x-1)(x+1)^3\right) = \log_2 \left(x^2-1\right) \Rightarrow (x-1)(x+1)^3 = x^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+1)^3 - \left(x^2-1\right) = 0 \Rightarrow \left(x^2-1\right)\left((x+1)^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+1)x(x+2) = 0 \Rightarrow x = \pm 1,\ x = 0,\ x = -2.$$

Найденные значения неизвестной не принадлежат ОДЗ, следовательно, уравнение не имеет действительных решений.

Ответ: нет действительных решений.

Задача 13. Решите уравнение $\log_2\left(9^{x-1} + 7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-1} + 1\right)$.

Решение. ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$.

Введём переменную $t = 3^{x-1}$, $t > 0$ получим

$$\log_2\left(t^2+7\right)=2+\log_2(t+1)\Rightarrow \log_2\left(t^2+7\right)=\log_2\left(4(t+1)\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^2+7=4(t+1)\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow t_1=1,\ t_2=3.$$

Делаем обратную замену

1) $3^{x-1}=1,\ x-1=0,\ x=1;$

2) $3^{x-1}=3,\ x-1=1,\ x=2.$

Ответ: 1; 2.

Задача 14. Решите уравнение $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$.

Решение. ОДЗ: $1-2x>0\Rightarrow x<\dfrac{1}{2}$.

$$3^{2\log_3(1-2x)}=5x^2-5\Rightarrow 3^{\log_3(1-2x)^2}=5x^2-5\Rightarrow (1-2x)^2=5x^2-5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+4x-6=0\Rightarrow x_{1,2}=-2\pm\sqrt{10}.$$

С учетом ОДЗ получаем

Ответ: $-2-\sqrt{10}$.

Задача 15. Решите уравнение $x^{\lg x}=1000x^2$.

Решение. ОДЗ: $x>0$.

Логарифмируя по десятичному основанию обе части уравнения, получим

$$\lg^2 x=\lg 1000+\lg x^2\Rightarrow \lg^2 x=\lg 1000+2\lg|x|.$$

Учитывая ОДЗ, перепишем

$$\lg^2 x-2\lg x-3=0\Rightarrow \lg x=-1,\ \lg x=3\Rightarrow x_1=0{,}1,\ x_2=1000.$$

Ответ: $0{,}1; 1000$.

Задача 16. Решите уравнение $x^{\log_2\left(\frac{x}{98}\right)}\cdot 14^{\log_2 7}=1$.

Решение. ОДЗ: $x>0$.

$$x^{\log_2 x-\log_2 2-2\log_2 7}\cdot 2^{\log_2 7}\cdot 7^{\log_2 7}=1\Rightarrow x^{\log_2 x-1-2\log_2 7}\cdot 7^{\log_2 7+1}=1.$$

Логарифмируя последнее уравнение по основанию 2, получим

$$(\log_2 x-1-2\log_2 7)\log_2 x+(\log_2 7+1)\log_2 7=0.$$

Полагая $t=\log_2 x$, получим квадратное уравнение

$$t^2-(2\log_2 7+1)\cdot t+\log_2^2 7+\log_2 7=0\Rightarrow t_1=\log_2 7,\ t_1=\log_2 7+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \log_2 x=\log_2 7,\ \log_2 x=\log_2 7+1\Rightarrow x_1=7,\ x_2=14.$$

Ответ: 7; 14.

Задача 17. Решите уравнение

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}4x^2+12x+9>0,\\3x+7>0,\\3x+7\neq 1,\\6x^2+23x+21>0,\\2x+3>0,\\2x+3\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2x+3)^2>0,\\3x+7>0,\\x\neq -2,\\(2x+3)(3x+7)>0,\\2x+3>0,\\x\neq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+7>0,\\2x+3>0,\\x\neq -1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup(-1;+\infty).$$

Учитывая ОДЗ, перепишем уравнение:

$$\log_{3x+7}(2x+3)^2+\log_{2x+3}\big((2x+3)(3x+7)\big)=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)+1=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)-3=0.$$

Полагая $t=\log_{3x+7}(2x+3)$, получим

$$2t+\frac{1}{t}-3=0\Rightarrow 2t^2-3t+1=0\Rightarrow t_1=\frac{1}{2},\ t_2=1.$$

Делаем обратную замену:

1) $t_1=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_{3x+7}(2x+3)=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{3x+7}=2x+3\Rightarrow 3x+7=(2x+3)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1=-\frac{1}{4}\in\text{ОДЗ},\ x_2=-2\notin\text{ОДЗ}.$$

2) $t_2=1\Rightarrow\log_{3x+7}(2x+3)=1\Rightarrow 2x+3=3x+7\Rightarrow x=-4\notin\text{ОДЗ}.$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

§4. Логарифмические неравенства

Простейшими логарифмическими неравенствами являются неравенства следующего вида

$$\log_a x>b,\ \log_a x<b,\ \log_a x\geq b,\ \log_a x\leq b,$$

где a и b – заданные действительные числа, причём $a>0$, $a\neq 1$.

Решение логарифмического неравенства начинается с нахождения области допустимых значений неизвестного, а затем применяются те же приёмы, что и при решении логарифмических уравнений. Кроме того, при решении логарифмического неравенства всегда используется свойство монотонности логарифмической функции (если $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то $x_1 > x_2$ при $a > 1$, и $x_1 < x_2$ при $0 < a < 1$). Так, например,

$$\log_a x > b \quad \Leftrightarrow \quad x > a^b \qquad \text{при } a > 1,$$

$$\log_a x < b \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < a^b \qquad \text{при } 0 < a < 1.$$

Задача 18. Решите неравенство $\log_2(x^2 - 4x + 3) < 3$.

Решение. ОДЗ: $x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

Из неравенства $\log_2(x^2 - 4x + 3) < 3 \Rightarrow \log_2(x^2 - 4x + 3) < \log_2 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 8 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) < 0 \Rightarrow x \in (-1;\, 5)$.

Учитывая ОДЗ, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty), \\ x \in (-1;5) \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (-1;1) \cup (3;5).$$

Ответ: $x \in (-1;1) \cup (3;5)$.

Задача 19. Решите неравенство $\log_6(x - 3\sqrt{x+1} + 3) < 1$.

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{x+1} + 3 > 0, \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x+1} < x + 3, \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 9(x+1) < (x+3)^2, \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x > 0, \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0,\ x > 3, \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0,\ x > 3.$$

Теперь рассмотрим само неравенство $\log_6(x - 3\sqrt{x+1} + 3) < \log_6 6$. Помня, что основание логарифма больше 1, потенцируем это неравенство. Получим

$$x - 3\sqrt{x+1} + 3 < 6 \Rightarrow 3\sqrt{x+1} > x - 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3 < 0, \\ x + 1 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ 9(x+1) > (x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x < 3; \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 - 15x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x < 3; \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ 0 < x < 15 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x < 3; \\ 3 \leq x < 15 \end{array}\right. \Rightarrow -1 \leq x < 15.$$

Учитывая ОДЗ, запишем

$$\begin{cases} -1 \le x < 0,\ x > 3, \\ -1 \le x < 15 \end{cases} \Rightarrow -1 \le x < 0, \quad 3 < x < 15.$$

Ответ: $-1 \le x < 0, \quad 3 < x < 15$.

Задача 20. Решите неравенство

$$\log_4(4^x - 1) \cdot \log_{16}\left(16^{x+1} - 8 \cdot 4^{x+1} + 16\right) > 12.$$

Решение. Заметим, что

$16^{x+1} - 8 \cdot 4^{x+1} + 16 = 16 \cdot 16^x - 32 \cdot 4^x + 16 = 16 \cdot \left(16^x - 2 \cdot 4^x + 1\right) = 16 \cdot \left(4^x - 1\right)^2$.

Тогда ОДЗ: $\begin{cases} 4^x - 1 > 0, \\ 16 \cdot \left(4^x - 1\right)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 4^x - 1 > 0$.

Учитывая полученное выше равенство $16^{x+1} - 8 \cdot 4^{x+1} + 16 = 16 \cdot \left(4^x - 1\right)^2$, перепишем исходное неравенство

$$\log_4(4^x - 1) \cdot \left(\log_{16} 16 + \log_{16}(4^x - 1)^2\right) > 12,$$

$$\log_4(4^x - 1) \cdot \left(1 + \log_{4^2}(4^x - 1)^2\right) > 12,$$

$$\log_4(4^x - 1) \cdot \left(1 + \log_4\left|4^x - 1\right|\right) > 12.$$

Последнее неравенство в ОДЗ равносильно следующему неравенству

$$\log_4(4^x - 1) \cdot \left(1 + \log_4\left(4^x - 1\right)\right) > 12.$$

Пусть $t = \log_4(4^x - 1)$, тогда это неравенство примет вид

$$t(1 + t) > 12 \Rightarrow t^2 + t - 12 > 0 \Rightarrow (t + 4)(t - 3) > 0 \Rightarrow t < -4,\ t > 3.$$

Таким образом, в силу возрастания функции $y = \log_4 x$ имеем

$$\log_4(4^x - 1) < -4,\ \log_4(4^x - 1) > 3 \Rightarrow 4^x - 1 < \frac{1}{256},\ 4^x - 1 > 64.$$

Учитывая ОДЗ и возрастание функции $y = 4^x$, запишем

$$0 < 4^x - 1 < \frac{1}{256},\ 4^x - 1 > 64 \Rightarrow 1 < 4^x < \frac{257}{256},\ 4^x > 65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < x < \log_4 \frac{257}{256},\ x > \log_4 65 \Rightarrow 0 < x < \log_4 257 - 4,\ x > \log_4 65.$$

Ответ: $0 < x < \log_4 257 - 4,\ x > \log_4 65$.

Задача 21. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_2(x - 1) \ge 0$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ \log_2(x-1)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x-1>1 \end{cases} \Rightarrow x>2$.

Далее, $\log_{\frac{1}{2}}\log_2(x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1 \Rightarrow \left(\text{так как } \frac{1}{2}<1\right) \Rightarrow \log_2(x-1) \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_2(x-1) \leq \log_2 2 \Rightarrow (\text{так как } 2>1) \Rightarrow x-1 \leq 2 \Rightarrow x \leq 3.$$

С учётом ОДЗ: $2<x\leq 3$.

Ответ: $x \in (2;3]$.

Задача 22. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+1) > \log_{x^2-1}(x+1)$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ x^2-1>0, \\ x^2-1\neq 1, \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (1;\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};2) \cup (2;+\infty)$.

Переходя к логарифмам по основанию $x+1$, получим

$$\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)} > \frac{1}{\log_{x+1}(x^2-1)} \Rightarrow \frac{1}{\log_{x+1}(x-1)} - \frac{1}{\log_{x+1}(x^2-1)} > 0 \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \frac{\log_{x+1}\dfrac{x^2-1}{x-1}}{\log_{x+1}(x-1)\cdot\log_{x+1}(x^2-1)} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_{x+1}(x-1)\cdot\log_{x+1}(x^2-1)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{x+1}(x-1)\cdot\log_{x+1}(x^2-1) > 0 \Rightarrow \log_{x+1}(x-1)\left(\log_{x+1}(x-1)+1\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{x+1}(x-1) < -1,\ \log_{x+1}(x-1) > 0 \Rightarrow \log_{x+1}(x^2-1) < 0,\ \log_{x+1}(x-1) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{x+1}(x^2-1) < \log_{x+1} 1,\ \log_{x+1}(x-1) > \log_{x+1} 1.$$

Так как для всех x из ОДЗ выполняется неравенство $x+1>1$, то последние два неравенства переписываются следующим образом

$$x^2-1<1,\ x-1>1 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2},\ x>2.$$

Учитывая ОДЗ, получим

Ответ: $x \in (1;\sqrt{2}) \cup (2;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. *Найдите значения выражений:*

1. $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$; 2. $\log_{\sqrt{2}} 9$, $\log_{64}\sqrt{3}$, $\log_2 81$, если $\log_4 3 = a$;

3. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, если $\log_a 27 = b$.

Задание 2. *Решите уравнения:*

1. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2x-2} = -2$;
2. $\log_{\frac{3}{5}} \dfrac{2x+3}{x-2} = 1$;
3. $100 \cdot x^{2\lg x} = x^4$;
4. $\log_{0,7} \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = 0$;
5. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{3-2x} = -1$;
6. $\log_{\frac{6-x}{2x}} 2 + 1 = 0$;
7. $\lg\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\lg\sqrt[3]{2x^2+3x}$;
8. $\log_{\frac{64}{7+x}} 8 - \dfrac{1}{2} = 0$;
9. $\log_{\frac{2x-1}{x+2}} 3 - 1 = 0$;
10. $\log_{\sqrt{6-x}} 3 - 2 = 0$;
11. $x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = 3^{\log_9 4}$;
12. $\lg(x^2-125) - \lg(x-6) = 2$;
13. $\log_3\sqrt{2x+1} = 1$;
14. $\sqrt{1+\log_x\sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0$;
15. $x^{\log_2\left(\frac{x}{98}\right)} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$;
16. $\sqrt{2\log_3(-x)} = \log_3\sqrt{x^2}$;
17. $\lg\lg x = \lg\lg 64 - \lg 2$;
18. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$;
19. $4^{\log_9 x^2} + 3^{\log_3 2} = 4^{\log_9 x+1} - 4^{\log_9 x}$;
20. $x^{\lg x} = 1000x^2$;
21. $2\lg\left(\sqrt{x+\dfrac{x}{24}} + \sqrt{\dfrac{x}{24}}\right) - 1 = \lg 1,5$;
22. $\lg\sqrt{5x-4} - 2 = \lg 0,18 - \lg\sqrt{x+1}$;
23. $4^{\log_3 x} + x^{\log_3 4} = 4 - 5^{\frac{1}{3}\log_5 8}$;
24. $\log_8(\log_3(1+\log_2(6-x)^2)^2) = \dfrac{1}{3}$;
25. $(1+\log_5 3)\log_{15} x = \log_5 28 + \log_{\frac{1}{5}}(x-3)$;

26. $\log_8(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x))) = \dfrac{1}{3}$.

Задание 3. *Решите неравенства:*

1. $\log_5(3-8x) > 0$;
2. $\log_{\frac{1}{2}}(7-3x) \ge 0$;
3. $\log_{\frac{1}{3}}(7-x) > -2$;
4. $\log_{\frac{1}{5}}(3-2x) > -1$;
5. $\log_2(x-3) \le 3$;
6. $\lg(4x-1) \le 1$;
7. $\lg(x^2+2x+2) < 1$;
8. $\log_3(3x-1) < \log_3(2x+3)$;
9. $\log_{\frac{1}{7}}(4x-3) \ge \log_{\frac{1}{7}}(x+3)$;
10. $\lg\left(\dfrac{3}{2}|x|-1\right) > \lg\left(x^2-2\right)$;
11. $\log_9^2 x \ge \log_3^2 \sqrt{1-\dfrac{x}{4}}$;
12. $\log_x \log_2 \dfrac{3x-7}{3x-4} > 0$;
13. $\log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4(x+1) \ge 9\dfrac{1}{4}$;
14. $\log_{0,5} \log_{\frac{5-4x}{2}}(16x^2-25x+10) > ($;
15. $\log_2(x^2-3x) + \log_{\frac{1}{2}}(x+3) < \log$

Ответы. **1.1.** 20; **1.2.** $8a;\ \frac{a}{6};\ 8a$; **1.3.** $\frac{1}{b}$;

2.1. 33; **2.2.** -3; **2.3.** 10; **2.4.** -4; **2.5.** $\frac{1}{2}$; **2.6.** 3; **2.7.** 3; **2.8.** -6;

2.9. -7; **2.10.** 3; **2.11.** 2; **3.12.** 95; **2.13.** 4; **2.14.** $\frac{1}{9}$; **2.15.** $7{,}14$; **2.16.**

$-9;\ -1$; **2.17.** $9;\ \frac{1}{9}$; **2.18.** 8; **2.19.** $0{,}1;\ 1000$; **2.20.** 10;

2.21. 8; **2.22.** 1; **2.23.** $4;\ 5{,}75;\ 6{,}25;\ 8$; **2.24.** 7; **2.26.** 2; **3.1.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$;

3.2. $\left[2;2\frac{1}{3}\right)$; **3.3.** $(-2;7)$; **3.4.** $(1;1{,}5)$; **3.5.** $(3;11]$; **3.6.** $\left(\frac{1}{4};\frac{11}{4}\right]$;

3.7. $(-4;2)$; **3.8.** $\left(\frac{1}{3};4\right)$; **3.9.** $\left(\frac{3}{4};2\right]$; **3.10.** $\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$;

3.11. $\left(0;\frac{4}{5}\right]\cup\{2\}$; **3.12.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)$; **3.13.** $\left(0;\sqrt[6]{2}-1\right]\cup[63;+\infty)$;

3.14. $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)\cup\left(\frac{15}{16};1\right)$; **3.15.** $\left(3-3\sqrt{2};0\right)\cup\left(3;3+\sqrt{2}\right)$;