**Тема 12**

**Тригонометрические функции**

# §1. Радианная мера угла. Тригонометрические функции

*Число Пи –* одна из главных математических постоянных. Его значение объясняется большой ролью, которую играет в науке и технике окружность и связанные с ней функции синус и косинус. Без синуса и косинуса невозможно описание волновых процессов в электронике, электротехнике, гидродинамике, механике. Например, ток и напряжение в электрической розетке описывается синусом или косинусом.

Число Пиравно отношению длины окружности к её удвоенному радиусу (диаметру). Обозначается это число греческой буквой . Оно выражается бесконечной непериодической десятичной дробью и, следовательно, является иррациональным числом. С точностью до семнадцатого знака после запятой число  равно 3,14159265358979328. При решении практических задач чаще всего достаточно знать, что .

В математике наряду с градусной мерой углов используется и другая мера, называемая *радианной*. *Радиан* (от лат. radius – луч, радиус) –единица измерения углов.

*Радианная мера угла* определяется следующим образом. Возьмём окружность произвольного радиуса, тогда угол в один радиан есть центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу окружности.



Учитывая определение числа , заключаем, что угол в 360° равен 2радиан. Радиан – это безразмерная величина, поскольку отражает соотношение длины дуги окружности к длине радиуса.

Радианной мере угла можно поставить в соответствие меру угла в градусах. Эту зависимость можно выразить следующими формулами:

, °.

 Таким образом, 1 рад =.

 Обратно,

;

;

.

Конкретные наиболее часто встречающиеся величины углов выражаются следующим образом в радианной и градусной мере:

|  |  |
| --- | --- |
| **Угол в радианах** | **Угол в градусах** |
| 0 (ноль Пи) | 0° |
| π/6 (одна шестая Пи) | 30° |
| π/4 (одна четверть Пи) | 45° |
| π/3 (одна треть Пи) | 60° |
| π/2 (Пи пополам) | 90° |
| π (Пи) | 180° |
| 2π (два Пи) | 360° |
| π/180 (Пи, делённое на 180) | 1° |

**Тригонометрические функции острого угла**

В учебниках по элементарной геометрии тригонометрические функции острого угла определяются как отношения сторон прямоугольного треугольника.

Пусть *ABС* – прямоугольный треугольник, в котором , .











Тогда *cинусом * называется отношение  (отношение противолежащего катета к гипотенузе); *косинусом * называется отношение  (отношение прилежащего катета к гипотенузе); *тангенсом * называется отношение  (отношение противолежащего катета к прилежащему); *котангенсом * называется отношение  (отношение прилежащего катета к противолежащему); *секансом* α называется отношение  (отношение гипотенузы к прилежащему катету); *косекансом* α называется отношение  (отношение гипотенузы к противолежащему катету).

Таким образом, , , , , , .

Данное определение тригонометрических функций имеет один большой недостаток: оно не позволяет говорить о значениях тригонометрических функций, например, для тупых углов, что необходимо при решении простейших геометрических задач, в которых рассматриваются тупоугольные треугольники.

Дадим еще одно, более общее, определение тригонометрических функций.

**Тригонометрические функции произвольного угла**

Введём на плоскости прямоугольную систему координат и рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в начале координат.



В данном случае будем говорить о *тригонометрическом круге* (или *тригонометрической окружности*). Точку с координатами , лежащую на этой окружности, будем называть началом отсчёта. Направление движения против часовой стрелки будем называть положительным направлением.

Тригонометрическая окружность служит для того, чтобы наносить на неё действительные числа. Так, например, пусть дано число . Начиная с точки , пройдём по тригонометрической окружности путь длиной : если  – в положительном направлении, если  – в отрицательном. Если , то нам придётся несколько раз пройти по одному и тому же месту. Точка, в которой мы остановились, и есть точка на окружности, соответствующая числу . По-другому точку на окружности, соответствующую числу , можно себе представить как второй конец намотанной на окружность нерастяжимой нити длины , один конец которой закреплён в начале отсчёта.







0





На следующем рисунке отмечены некоторые точки, соответствующие некоторым действительным числам.



0

























Теперь всё готово для того, чтобы ввести основные определения.

*Синусом* ** называется ордината точки на тригонометрическом круге, соответствующей числу **.

*Косинусом * называется абсцисса точки на тригонометрическом круге, соответствующей числу **.

Если * –* радианная мера острого угла, то синус и косинус этого угла в прежнем (геометрическом) смысле равен синусу и косинусу числа ** в рассматриваемом смысле.

*Тангенсом* ** называется отношение синуса числа ** к его косинусу:

.

*Котангенсом* ** называется отношение косинуса числа ** к его синусу:

.

Если * –* радианная мера острого угла, то тангенс и котангенс этого угла в прежнем смысле равен соответственно тангенсу и котангенсу числа в новом смысле.

*Секанс* и *косеканс* определяются так:

, .

Теперь можно узнать, чему равны тригонометрические функции не только острых, но и прямого и тупых углов.

Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса для некоторых углов приведены в следующей таблице («-» означает, что это значение не определено).

**Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0°(0 рад) | 30° (π/6) | 45° (π/4) | 60° (π/3) | 90° (π/2) | 180° (π) | 270° (3π/2) | 360° (2π) |
| sin | 0 |  |  |  | 1 | 0 | –1 | 0 |
| cos | 1 |  |  |  | 0 | –1 | 0 | 1 |
| tg | 0 |  | 1 |  | - | 0 | - | 0 |
| ctg | - |  | 1 |  | 0 | - | 0 | - |
| sec | 1 |  |  | 2 | - | –1 | - | 1 |
| cosec | - | 2 |  |  | 1 | - | –1 | - |

Покажем также значения синуса и косинуса на тригонометрической окружности. Первое число в паре  отвечает косинусу, а второе – синусу.



**Задачи для самостоятельного решения**

**Задание 1.** *Вычислите значения тригонометрических выражений:*

; ; ; ; ; ; ; ; ;; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; .

**Задание 2.** *Вычислите значения тригонометрических выражений:*

  ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; .

**Задание 3.** *Вычислите значения тригонометрических выражений:*

; ; ; ; ; ;; ; ; .