Тема 13

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

При преобразовании тригонометрических выражений, а также решении уравнений и неравенств, необходимо помнить основные формулы: основное тригонометрическое тождество, функции суммы и разности аргументов, двойного аргумента и другие.

Основное тригонометрическое тождество имеет вид:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Рекомендуется запомнить формулы синуса и косинуса суммы, так как из них, зная свойства тригонометрических функций, легко получить другие тождества. Итак,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Отсюда, заменяя β на $-\beta$, учитывая нечётность функции $y=\sin x$ и чётность функции $y=\cos x$, получаем формулы синуса и косинуса разности:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Полагая же $\beta=\alpha$, получаем формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Применяя основное тригонометрическое тождество, запишем ещё две формулы косинуса двойного аргумента, выражающие его только через одну функцию, синус или косинус:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha; \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Складывая и вычитая формулы синуса суммы и синуса разности, получим

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

(иначе, $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$);

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha.$$

Отсюда, полагая $\alpha+\beta=x,\ \alpha-\beta=y$, получаем представление суммы и разности синусов в виде произведения:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Аналогично из формул косинуса суммы и разности имеем

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

а также

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}.$$

Формулы для тангенса и котангенса суммы получаем следующим образом:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}.$$

Итак, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

Учитывая нечётность функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}.$$

Полагая $\beta = \alpha$, получаем формулы функций двойного аргумента:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Задача 1. Докажите тождество $\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cdot\cos\alpha$.

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\left(\sin^3\frac{\alpha}{2}-\cos^3\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin^3\frac{\alpha}{2}+\cos^3\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\times$$

$$\times\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\alpha\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\alpha\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)=$$

$$=-\cos\alpha\cdot\frac{4-\sin^2\alpha}{4}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cdot\cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Найдите угол α, удовлетворяющий двойному неравенству $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, если известно, что $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{12}{5}$.

Решение. По формуле тангенса двойного угла имеем $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{12}{5}$, отсюда $10\operatorname{tg}\alpha=-12+12\operatorname{tg}^2\alpha$ или $12\operatorname{tg}^2\alpha-10\operatorname{tg}\alpha-12=0$.

Решая уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$, получаем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}=\frac{5\pm13}{12}$.

То есть $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$ или $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{3}$. Учитывая что угол α принадлежит второй четверти, в которой тангенс отрицателен, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{3}\Rightarrow\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

При преобразовании тригонометрических выражений удобны также формулы, устанавливающие связь между различными тригонометрическими функциями, например,

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Задача 3. Исключите α из системы равенств: $x=\operatorname{tg}^2\alpha,\ y=\sin^2\alpha$.

Решение. Имеем $x=\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{y}{1-y}$, или $x-y=xy$.

Ответ: $x-y=xy$.

Далее, синус и косинус можно выразить через тангенс половинного аргумента. Эти формулы получаются из формул двойного аргумента с помощью несложных преобразований:

$$\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 4. Вычислите $\dfrac{6\sin\alpha-7\cos\alpha+1}{8\sin\alpha+9\cos\alpha-1}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=4$.

Решение. Используя вышеприведенные формулы, получаем

$$\frac{6\sin\alpha-7\cos\alpha+1}{8\sin\alpha+9\cos\alpha-1}=\frac{\dfrac{2\cdot4}{1+4^2}-7\cdot\dfrac{1-4^2}{1+4^2}+1}{8\cdot\dfrac{2\cdot4}{1+4^2}+9\cdot\dfrac{1-4^2}{1+4^2}-1}=\frac{8-7\cdot(-15)+17}{8\cdot8+9\cdot(-15)-17}=-\frac{65}{44}.$$

Ответ: $-\dfrac{65}{44}$.

Формулы, позволяющие упрощать тригонометрические выражения, в которых к аргументу добавлено число, кратное $\dfrac{\pi}{2}$, называются формулами приведения, например, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$; $\cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha$.

Их можно не запоминать, достаточно усвоить два правила:

1) если к аргументу добавляется число, кратное $\frac{\pi}{2}$, но не кратное π, то функция меняется (sin на cos и, наоборот, tg на ctg и наоборот); если добавляется число, кратное π, то функция не меняется;
2) знак определяется знаком исходной функции, при этом считается, что аргумент – острый угол.

Задача 5. Упростите выражение $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Решение. По формулам приведения имеем:

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\alpha;\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha;\ \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha.$$

Тогда исходное выражение равно

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}=\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\alpha}=1.$$

Ответ: 1.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. *Вычислите значения тригонометрических выражений:*

$\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}$; $\cos^4\frac{\pi}{8}-\sin^4\frac{\pi}{8}$; $\cos^4\frac{\pi}{12}-\cos^4\frac{7\pi}{12}$; $\cos^4\frac{5\pi}{8}-\cos^4\frac{\pi}{8}$; $\cos^4\frac{5\pi}{12}-\sin^4\frac{7\pi}{12}$; $\cos^4\frac{5\pi}{8}-\sin^4\frac{3\pi}{8}$; $\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}$; $\cos^4\frac{\pi}{12}+\sin^4\frac{\pi}{12}$; $\cos^6\frac{\pi}{12}+\sin^6\frac{\pi}{12}$; $\cos^6\frac{\pi}{12}-\sin^6\frac{\pi}{12}$; $\cos^6\frac{\pi}{8}+\sin^6\frac{\pi}{8}$; $\cos^6\frac{\pi}{8}-\sin^6\frac{\pi}{8}$.

Задание 2. *Вычислите:*

1. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-2$;
2. $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$;

3. $\sin^2\alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$;
4. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
5. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 4\cos(\pi - \alpha)$, если $\cos\alpha = -0{,}4$;
6. $\sqrt{15}\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{11}{15}}$, $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$;
7. $5\sqrt{6}\cdot\operatorname{tg} x$, если $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$;
8. $\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg} x$, если $\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$;
9. $\sqrt{2}\left(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x\right)$, если $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$;
10. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$;
11. $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos(\alpha - 90^\circ) = 0{,}2$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Задание 3. *Упростите выражение:*

1. $\operatorname{tg}^2\left(270^\circ + \alpha\right)\cdot\sin^2\left(180^\circ + \alpha\right)$;
2. $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
3. $\sin(x + 2\pi) + \operatorname{tg} x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$;
4. $\sin\alpha\sin 2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\alpha\cos 2\alpha$.