Тема 14

Тригонометрические уравнения

Все тригонометрические уравнения решаются сведением к одному из четырёх простейших:

1) $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, & \text{если} |\alpha| \le 1, \\ \text{нет решений}, & \text{если} \ |\alpha| > 1. \end{cases}$

2) $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, & \text{если} |\alpha| \le 1, \\ \text{нет решений}, & \text{если} \ |\alpha| > 1. \end{cases}$

3) $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

4) $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Метод сведения к простейшему уравнению выбирают, исходя из вида уравнения. Рассмотрим некоторые из методов на примерах.

1. ***Сведение к квадратному уравнению***

Задача 1. Решите уравнение $2\sin^2 x + \cos 4x = 1$.

Решение. Выражая $\sin^2 x$ и $\cos 4x$ через $\cos 2x$, получим $1 - \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 1$. Отсюда $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\cos 2x$, получим $\cos 2x = 1$ или $\cos 2x = -1/2$. Тогда $2x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, или $2x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Отсюда

Ответ: $x = \pi k,\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n, k \in \mathbf{Z}.$

Задача 2. Решите уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{16}\cos^2 2x$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 16 и перепишем его в виде $(2\sin^2 x)^4 + (2\cos^2 x)^4 = 17\cos^2 2x$. Выражая слагаемые левой части через косинус двойного аргумента, имеем $(1 - \cos 2x)^4 + (1 + \cos 2x)^4 = 17\cos^2 2x$. Раскрывая скобки в левой части уравнения, получаем

$$1 - 4\cos 2x + 6\cos^2 2x - 4\cos^3 2x + \cos^4 2x +$$
$$+ 1 + 4\cos 2x + 6\cos^2 2x + 4\cos^3 2x + \cos^4 2x = 17\cos^2 2x.$$

Приводя подобные слагаемые, получаем уравнение $2\cos^4 2x - 5\cos^2 2x + 2 = 0$. Делая замену $\cos^2 2x = t$ и решая квадратное уравнение, имеем $\cos^2 2x = \dfrac{1}{2}$, отсюда $\cos 2x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $2x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}$. Отсюда

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4},\ k \in \mathbf{Z}$.

2. ***Группировка и разложение на множители***

Идея данного метода состоит в том, чтобы привести уравнение к такому виду, что в левой части будет некоторое произведение, а в правой – нуль. Для этого используют формулы сокращенного умножения и тригонометрические тождества. «Рецепта», подходящего для решения любого уравнения, не существует, поэтому надо пробовать различные способы группировки, пока не найдётся нужный. При достаточно большой практике вырабатывается чутьё, позволяющее во многих случаях довольно быстро получать результат.

Задача 3. Решите уравнение $(1+2\sin x)\sin x = \sin 2x + \cos x$.

Решение. Применяя в правой части уравнения формулу синуса двойного аргумента и вынося за скобки общий множитель, получаем $(1+2\sin x)\sin x = \cos x(1+2\sin x)$. Переносим всё в левую часть и раскладываем на множители: $(1+2\sin x)(\sin x - \cos x) = 0$. Отсюда $1+2\sin x = 0$ или $\sin x - \cos x = 0$, то есть $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\operatorname{tg} x = 1$. Решая эти уравнения, получаем

Ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}$.

Задача 4. Решите уравнение $3\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x + 3\operatorname{ctg}^2 x + 2 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $3\left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x\right) + 4(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 2 = 0$ и сделаем замену $t = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$. Тогда $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = t^2 - 2$, и уравнение примет вид $3\left(t^2 - 2\right) + 4t + 2 = 0$, то есть $3t^2 + 4t - 4 = 0$. Корни квадратного уравнения $t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3}$; $t_1 = -2,\ t_2 = \frac{2}{3}$, следовательно, $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$ или $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{3}$. Поскольку $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, легко заметить, что первое из уравнений имеет единственное решение $\operatorname{tg} x = -1$, а второе не имеет решений. Это следует из известных неравенств $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$ и $a + \frac{1}{a} \leq -2$ при $a < 0$.

Решая уравнение $\operatorname{tg} x = -1$, получаем

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Задача 5. Решите уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=$$
$$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right).$$

Тогда исходное уравнение можно переписать в виде $(\sin x+\cos x-1)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=0$. Отсюда $\sin x+\cos x=1$ или $\sin 2x=2$.

Второе уравнение не имеет решений, а первое сводится к уравнению $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решая его, получаем

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

3. *Сведение к однородным уравнениям*

Уравнение, все члены которого имеют одну и ту же степень, называется однородным. Мы рассмотрим тригонометрические уравнения, которые можно привести к одному из двух видов:

$$A\sin x+B\cos x=0 \quad \text{(однородное первого порядка);}$$

$$A\sin^2 x+B\sin x\cos x+C\cos^2 x=0 \quad \text{(однородное второго порядка).}$$

Первое сводится к линейному, а второе – к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$.

Задача 6. Решите уравнение $\sin x-3\cos x=\frac{1}{2}-\cos^2\frac{x}{2}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения, используя формулу понижения степени, получим $\sin x-3\cos x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}$. Отсюда $\sin x-\frac{5}{2}\cos x=0$. Очевидно, что $\cos x\neq 0$, так как в противном случае мы получили бы также и $\sin x=0$, что противоречило бы основному тригонометрическому тождеству. Поэтому можно разделить обе части уравнения на $\cos x$, получим $\operatorname{tg} x=\frac{5}{2}$. Отсюда имеем

Ответ: $x=\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Задача 7. Решите уравнение $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получим
$6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2\sin^2 x+2\cos^2 x$.
Отсюда $4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$: $4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0$. Его корни: $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$. Решая эти уравнения, получаем

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = arctg\,\frac{3}{4} + \pi k,\ n, k \in \mathbf{Z}$.

4. ***Метод введения вспомогательного аргумента***

Уравнения вида $A\sin x + B\cos x = C$, где A, B, C – произвольные действительные числа, $A^2 + B^2 \neq 0$, можно решать, сводя к однородному, если перейти к половинному аргументу в левой части и использовать основное тригонометрическое тождество в правой части. Но проще использовать следующий метод, называемый методом введения вспомогательного аргумента.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{A^2 + B^2}$, получим:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos x = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В последнем уравнении сумма квадратов коэффициентов при $\sin x$ и $\cos x$ равна 1 (проверьте!), поэтому можно считать, что $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\alpha$, а $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}$. Тогда уравнение примет вид $\sin(x + \alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. (Можно, наоборот, считать, что $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\alpha$, а $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\alpha$, тогда вид уравнения: $\cos(x - \alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.)

Задача 8. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3 + 1} = 2$, получим $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$. Перепишем его в виде $\cos\frac{\pi}{6}\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2}$. Тогда в левой части получается формула синуса разности, то есть $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Его решения: $x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Отсюда получаем

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Задача 9. Решите уравнение $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ и разделим обе части на 2, получим $\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$ или $\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. Отсюда $\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$. Преобразуя разность синусов в произведение, получим $2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$. Следовательно, $\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0$ или $\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$. Решая последние уравнения, получаем

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ n,k\in\mathbf{Z}$.

Предложенная выше идея может быть использована и при решении некоторых других задач, например, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

Задача 10. Найдите область значений функции $f(x)=3\sin x+4\cos x$.

Решение. Умножим и разделим правую часть равенства на $\sqrt{3^2+4^2}=5$, получим $f(x)=5\sin(x+\alpha)$, где $\alpha=\arcsin\frac{4}{5}$. Отсюда понятно, что для всякого значения аргумента $-5\le f(x)\le 5$.

Ответ: $[-5;5]$.

5. *Преобразование сумм в произведение и наоборот*

Уравнения, содержащие тригонометрические функции с аргументами большой кратности, чаще всего решают с помощью формул преобразования сумм в произведения и произведений в суммы.

Задача 11. Решите уравнение $\sin 2x\sin 6x\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 12x=0$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 2 и представим удвоенное произведение синусов как разность косинусов, получим

$$(\cos 4x-\cos 8x)\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 12x=0.$$

Раскроем скобки и ещё раз умножим на 2, получим

$$2\cos^2 4x-2\cos 8x\cos 4x+\cos 12x=0.$$

Представим удвоенное произведение косинусов как сумму косинусов:

$$2\cos^2 4x-\cos 12x-\cos 4x+\cos 12x=0.$$

Приводя подобные и вынося за скобки общий множитель, получаем

$$\cos 4x(2\cos 4x-1)=0.$$

Отсюда $\cos 4x=0$ или $\cos 4x=1/2$. Решая эти уравнения, имеем

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ n,k\in\mathbf{Z}$.

Задача 12. Решите уравнение

$$\cos(22°-x)\cos(82°-x)+\cos(112°-x)\cos(172°-x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x).$$

Решение. Умножим обе части уравнения на 2 и представим произведение косинусов через сумму:

$$\cos(104°-2x)+\cos 60°+\cos(284°-2x)+\cos 60°=\sin x+\cos x.$$

Заметим, что

$$\cos(104°-2x)=\cos(90°+14°-2x)=-\sin(14°-2x),$$

$$\cos(284°-2x)=\cos(270°+14°-2x)=\sin(14°-2x) \text{ и } \cos 60°=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\sin x+\cos x=1$. Решая последнее уравнение методом введения вспомогательного аргумента, получаем

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

6. *Решение уравнений с использованием свойств ограниченности тригонометрических функций (метод мажорант или оценки)*

Некоторые тригонометрические уравнения легко решить, используя область изменения функций $\sin x$ и $\cos x$.

Задача 13. Решите уравнение $\sin 2x-\sin 6x+2=0$.

Решение. Поскольку $-1\le\sin 2x\le 1$ и $-1\le\sin 6x\le 1$, вышеуказанное равенство выполняется только в случае $\sin 2x=-1$, $\sin 6x=1$, то есть имеет место система $\begin{cases}2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ 6x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

Выбирая общие элементы из двух множеств, получаем

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Задача 14. Решите уравнение $\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)(1+tg^2 2y)(3+\sin 3z)=4$.

Решение. Заметим, что $\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\ge 2$, так как это сумма положительных взаимно обратных величин ($\cos x\ne 0$), причём равенство имеет место при условии $\cos^2 x=1$. Далее, $1+\mathrm{tg}^2 2y=\frac{1}{\cos^2 2y}\ge 1$ и $2\le 3+\sin 3z\le 4$.

Следовательно, $\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)(1+\operatorname{tg}^2 2y)(3+\sin 3z)\geq 4$. Поэтому имеет место система $\begin{cases}\cos^2 x=1,\\ \cos^2 2y=1,\\ \sin 3z=-1;\end{cases}$ отсюда

Ответ: $x=\pi k,\ y=\dfrac{\pi}{2}l,\ z=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}n,\ k,l,n\in\mathbf{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. *Решите уравнения*:

1. $\sqrt{3}\cdot\sin 2x=0$;
2. $2\cdot\sin 3x=1$;
3. $\sqrt{2}\cdot\sin x=1$;
4. $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$;
5. $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
6. $2\cdot\cos 5x=1$;
7. $\sqrt{2}\cdot\cos 2x=1$;
8. $2\cdot\cos x=\sqrt{3}$;
9. $\cos 2x=1$;
10. $\cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$;
11. $\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
12. $\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
13. $\sqrt{3}\operatorname{tg}2x=1$;
14. $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}3x=3$;
15. $\operatorname{tg}8x=-1$;
16. $\sqrt{2050}\cdot\operatorname{ctg}x=0$;
17. $\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=1$;
18. $2\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=-6$;
19. $\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=-1$;
20. $tg\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$;
21. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=-\dfrac{1}{2}$;
22. $1+\cos\dfrac{x}{2}+\cos x=0$;
23. $1-\sin\dfrac{x}{2}=\cos x$;
24. $2\sin^2 x+\cos 4x=0$;
25. $\sin 4x+2\cos^2 x=1$.