Тема 23

Текстовые задачи

Задачи на проценты

Процент – это сотая часть числа. В задачах на проценты требуется уметь находить процент от числа и число по его проценту. Это несложно сделать, используя свойства пропорции. Пусть x – некоторое число, y – p% от этого числа. Этот факт удобно записывать следующим образом:

$$x \quad - \quad 100\%$$

$$y \quad - \quad p\%$$

Тогда $p \cdot x = 100y;\quad p = \dfrac{100y}{x};\quad y = \dfrac{p \cdot x}{100}.$

При решении задач на проценты важно помнить, что нельзя складывать и вычитать проценты от разных чисел.

Задача 1. В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Решение: Количество жителей в 2009 году составляет 108% от числа жителей в 2008, т.е $1{,}08 \cdot 40000 = 43200$.
Количество жителей в 2010 году составляет 109% от числа жителей в 2009 году, т.е. $1{,}09 \cdot 43200 = 47088$.

Ответ: 47088.

Для решения следующей задачи удобно применять формулу сложного процента, которая используется для начисления процентов по вкладам.

Пусть на счёт в банке положена сумма S рублей на условии начисления p% в конце каждого года хранения. Какая сумма будет на счёте через n лет, если клиент не снимает деньги со счёта в течение этого времени?

Подсчитаем сумму вклада через один год, через два года и т. д.

Через год: $S + S \cdot \dfrac{p}{100} = S\left(1 + \dfrac{p}{100}\right).$

Через два года: $S\left(1 + \dfrac{p}{100}\right) + S\left(1 + \dfrac{p}{100}\right) \cdot \dfrac{p}{100} = S\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^2.$

Через три года: $S\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^2 + S\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^2 \cdot \dfrac{p}{100} = S\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^3.$

Через n лет: $S\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Если по такой же схеме происходит уменьшение исходного числа (например, уценка товара на одно и то же количество процентов), то после n уценок получаем сумму $S\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$.

Задача 2. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20000 рублей, через два года был продан за 15842 рублей.

Решение: Пусть цена уменьшается на p%, тогда через два года она станет

$$20000\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=15842 \Rightarrow \left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\frac{15842}{20000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\frac{7921}{10000} \Rightarrow \left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\left(\frac{89}{100}\right) \Rightarrow 1-\frac{p}{100}=\frac{89}{100} \Rightarrow p=11.$$

Ответ: 11.

Задача 3. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А и Б закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Решение: Пусть банк начисляет p% годовых, тогда у первого вкладчика через два года на счёте будет $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, а у второго в то же время (после года хранения) $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Получаем уравнение $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-7700\left(1+\frac{p}{100}\right)=847.$

Отсюда $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}=847 \Rightarrow \left(1+\frac{p}{100}\right).\cdot\frac{p}{100}=\frac{11}{100} \Rightarrow p=10.$

Ответ: 10.

Если в условии задачи идёт речь о приготовлении раствора (добавлении воды в раствор) или, наоборот, выпаривании или сушке, то надо считать массу или объём той составляющей, которая не меняется в результате этого процесса: растворённое вещество или «сухой остаток».

Задача 4. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Решение: При сушке винограда меняется количество воды, а масса «сухого вещества» остаётся неизменной. В изюме его содержание 95% (т.к. воды – 5%). В 20 кг изюма содержится $0{,}95 \cdot 20 = 19$кг сухого вещества, и то же количество его было в винограде. При этом виноград содержит 10% «сухого вещества», значит, искомая масса винограда 190кг.

Ответ: 190.

Задачи на смеси и сплавы

Задачи на смеси и сплавы удобно решать с помощь таблицы, в которой отмечены масса (или объём) всей смеси, процентное содержание компоненты и масса (объём) компоненты.

Задача 5. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Решение: Обозначим через x массу первого сплава и заполним таблицу:

N	Масса сплава	% меди	Масса меди
1	x	10	$0{,}1x$
2	$x+3$	40	$0{,}4(x+3)$
3	$2x+3$	30	$0{,}3(2x+3)$

Из третьего столбца таблицы получаем уравнение

$$0{,}1x + 0{,}4(x+3) = 0{,}3(2x+3) \Rightarrow x + 4(x+3) = 3(2x+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 4x + 12 = 6x + 9 \Rightarrow x = 3.$$

Поскольку в задаче спрашивается масса третьего сплава, получаем

Ответ: 9.

Задача 6. Имеется два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение: Заполним таблицу.

N	Масса раствора	Концентрация	Масса кислоты
1	30		
2	20		
3	50	68	$0{,}68 \cdot 50 = 34$
4	40	70	$0{,}7 \cdot 40 = 28$

В четвертой строке таблицы описан раствор, состоящий из равных масс (по 20кг) первого и второго растворов.
Разность масс кислоты в третьем и четвёртом растворах получилась из–за того, что в четвёртый взят не весь первый раствор (30кг) а только часть (20кг) значит, в не взятых 10кг первого раствора содержится 34–28=6кг кислоты. А тогда весь первый раствор содержит 18кг кислоты.

Ответ: 18.

Заметим, что нас в этой задаче не интересовали параметры в незаполненных клетках таблицы.

Задачи на прогрессии

Мы вспомним определение арифметической прогрессии и рассмотрим решение двух задач из Открытого банка заданий ЕГЭ.

Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, отличается от предыдущего на одно и то же число, называемое разностью прогрессии:

$$a_1,\ a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,\ a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d, \ldots$$

Основные формулы, которые необходимо знать – формула общего члена a_n, формула суммы S_n n первых членов прогрессии и характеристическое свойство (каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов).

$$a_n = a_1 + (n-1)d; S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Задача 7. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение: Ясно, что в задаче идёт речь об арифметической прогрессии, т.к. норма покраски ежедневно изменяется на одно и то же число.
Сумма первого и последнего её членов равна 60, сумма всех членов – 240, найти надо количество членов. Из формулы суммы членов прогрессии получаем

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow\ 240 = \frac{60}{2} \cdot n \Rightarrow\ n = \frac{240}{30} = 8.$$

Ответ: 8.

Задача 8. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Решение: Расстояния, пройденные туристом каждый день – члены арифметической прогрессии, причём $a_1 = 10,\ S_n = 120,\ n = 6$. Надо найти третий член этой прогрессии. Имеем

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \Rightarrow 120 = \frac{20 + 5d}{2} \cdot 6 \Rightarrow d = 4.$$

Тогда $a_3 = a_1 + 2d = 10 + 8 = 18.$

Ответ: 18.

Задачи на работу

При решении задач на работу удобно считать объём работы равным 1, тогда производительность труда (работа, выполненная в единицу времени) есть величина, обратная затраченному на работу времени.

Задача 9. Первый насос наполняет бак за 20 минут, второй — за 30 минут, а третий — за 1 час. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

Решение: Пусть объём бака равен 1. Тогда производительности насосов (объём, заполняемый за 1 мин) соответственно $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}$ и $\frac{1}{60}$.

Совместная производительность $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{3+2+1}{60} = \frac{1}{10}$.

Значит, время совместной работы $1 : \frac{1}{10} = 10$.

Ответ: 10.

Задача 10. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 16 рабочих, а во второй — 25 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Решение: Пусть объём каждого заказа равен 1, а количество дней, которое потребовалось на выполнение этих заказов n. Подсчитаем «человеко–дни», затраченные на работу.

Первый заказ: $7\cdot16+(n-7)\cdot(16+8)$.

Второй заказ: $7\cdot25+(n-7)\cdot(25-8)$.

Поскольку работа была закончена одновременно, получаем уравнение

$$7\cdot16+(n-7)\cdot24=7\cdot25+(n-7)\cdot17\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7\cdot16+n\cdot24-7\cdot24=7\cdot25+n\cdot17-7\cdot17\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7n=7\cdot25-7\cdot17-7\cdot16+7\cdot24\Rightarrow\ n=25-17-16+24=16.$$

Ответ: 16.