Тема 3

Квадратное уравнение. Формулы Виета

Два алгебраических выражения, соединенных знаком «=», образуют равенство. Равенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него переменных, называется *тождеством*.

Уравнение – это равенство, справедливое при определенных значениях входящих в него переменных.

(1) $ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0$ – квадратное уравнение.

(1′) $x^2+px+q=0$ – приведённое квадратное уравнение ($p=b/a,\ q=c/a$).

$D=b^2-4ac$ – дискриминант квадратного трёхчлена.

Если $D\geq 0$, то квадратное уравнение имеет корни, причём при $D>0$ – два различных корня $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; при $D=0$ – равные корни (один корень) $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Для корней квадратного уравнения справедливы равенства – формулы Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b/a, \\ x_1\cdot x_2=c/a \end{cases} \quad (2) \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \quad (2')$$

С помощью формул Виета можно судить о свойствах корней квадратного уравнения, не находя их значений. Так, например, если свободный член q уравнения (1′) положителен, то корни уравнения имеют одинаковые знаки. При этом, поскольку $x_1+x_2=-p$, то оба корня положительны при $p<0$ и отрицательны при $p>0$.

Используя формулы Виета, можно, не выписывая корней x_1 и x_2 уравнения, находить через коэффициенты квадратного уравнения значения выражений, составленных из комбинаций слагаемых вида x_1+x_2 и x_1x_2, в частности сумму одинаковых степеней корней: $x_1^n+x_2^n$.

Задача 8. Не находя корней уравнения $3x^2+x-1=0$, найдите величины сумм их квадратов $x_1^2+x_2^2$ и кубов $x_1^3+x_2^3$.

Решение. Квадратное уравнение перепишем в виде $x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}=0$.

Согласно формулам Виета $(2')$ справедливы следующие равенства:

$$x_1+x_2=-\frac{1}{3},\quad x_1\cdot x_2=-\frac{1}{3}.$$

1. Выразим $x_1^2+x_2^2$ через x_1+x_2 и x_1x_2:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2)-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Учитывая формулы Виета, запишем

$$x_1^2+x_2^2=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}=\frac{7}{9}.$$

2. Выразим $x_1^3+x_2^3$ через x_1+x_2 и $x_1\cdot x_2$:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right).$$

Снова учитывая формулы Виета, получим

$$x_1^3+x_2^3=-\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{9}=-\frac{10}{27}.$$

Ответ: $\frac{7}{9};\ -\frac{10}{27}$.

Подобным же образом решаются и обратные задачи, то есть такие задачи, в которых заданы комбинации чисел x_1+x_2 и x_1x_2, и требуется определить коэффициенты уравнения, для которого x_1 и x_2 являются корнями.

Разложение квадратного трёхчлена на множители:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Квадратный трёхчлен можно записать в виде

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства является полным квадратом. Процедура, с помощью которой трёхчлен преобразуется к такому виду, называется *выделением полного квадрата*.

Задача 9. Выделите полный квадрат следующих трёхчленов:

а) x^2-2x+6; б) $-x^2+3x-1$.

Решение.

а) $x^2-2x+6=(x^2-2\cdot x\cdot 1+1)+5=(x-1)^2+5$;

б) $-x^2+3x-1=-(x^2-3x+1)=-\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+1\right)=$

$=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$.

Функция $f(x)=ax^2+bx+c$ называется квадратичной. Здесь a, b, c – фиксированные действительные числа, причём $a\neq 0$, а x принимает любые действительные значения. График квадратичной функции называют параболой.

Поскольку $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$, то, вводя обозначения

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=\frac{4ac-b^2}{4a},$$

получим $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$.

Точка $M_0(x_0,y_0)$ на графике называется вершиной параболы. При $a>0$ в точке x_0 квадратичная функция принимает наименьшее значение, равное y_0, и ветви параболы направлены вверх. При $a<0$ в точке x_0 функция принимает наибольшее значение, равное y_0, и ветви параболы направлены вниз.

График функции $f(x)=x^2$ имеет вид

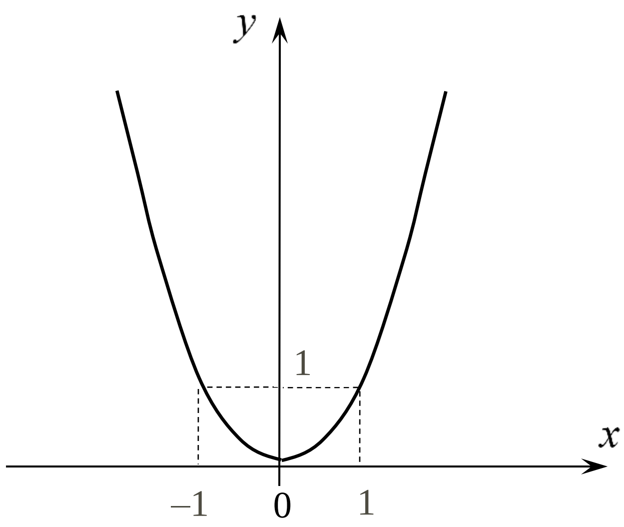
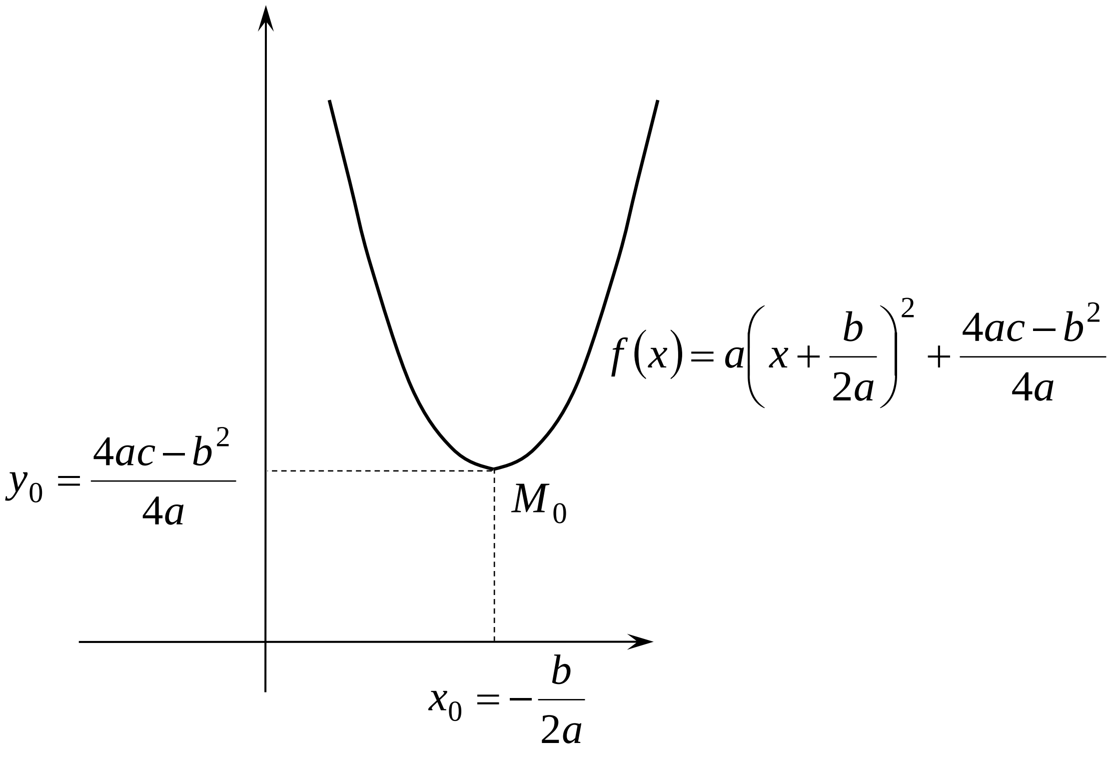


График произвольной квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$ имеет вид (для определённости на рисунке рассматривается случай $a>0$)



Заметим, что

1) прямая $x=x_0=-b/2a$ – ось параболы, одновременно является её *осью симметрии*;
2) если $a>0$, то *ветви параболы направлены вверх*, если $a<0$, то *вниз*;
3) дискриминант $D=b^2-4ac$ показывает, *пересекается ли парабола с осью абсцисс*:

а) при $a > 0$, $D < 0$ парабола лежит выше оси Ox (следовательно, не имеет общих точек с Ox) (рис. 1);

б) при $a > 0$, $D = 0$ парабола касается сверху оси Ox в точке $x_0 = x_1 = x_2$ (рис. 2);

в) при $a > 0$, $D > 0$ парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2 (рис. 3);

г) при $a < 0$, $D < 0$ парабола лежит ниже оси Ox (следовательно, не имеет общих точек с Ox) (рис. 4);

д) при $a < 0$, $D = 0$ парабола касается снизу оси Ox в точке $x_0 = x_1 = x_2$ (рис. 5);

е) при $a < 0$, $D > 0$ парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2 (рис. 6).

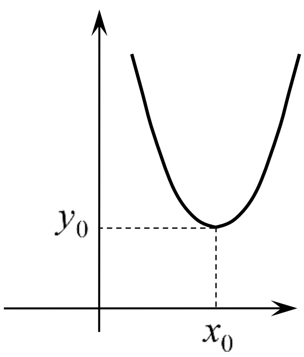


Рис. 1

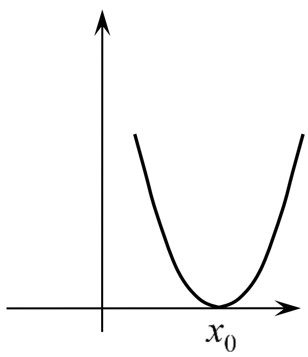


Рис. 2

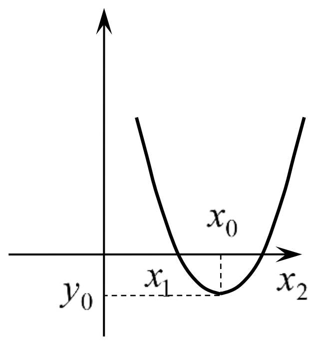


Рис. 3

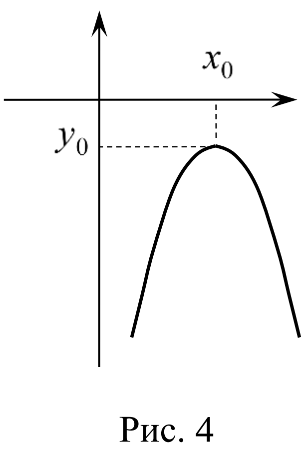


Рис. 4

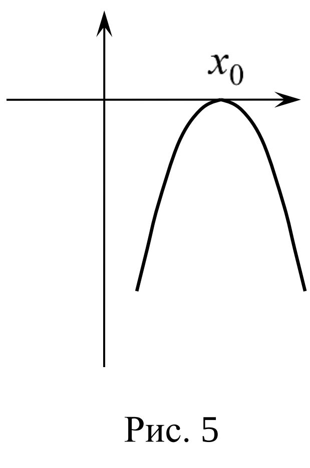


Рис. 5

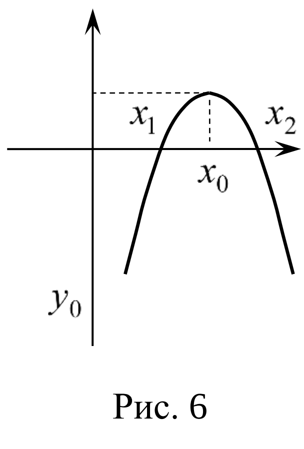
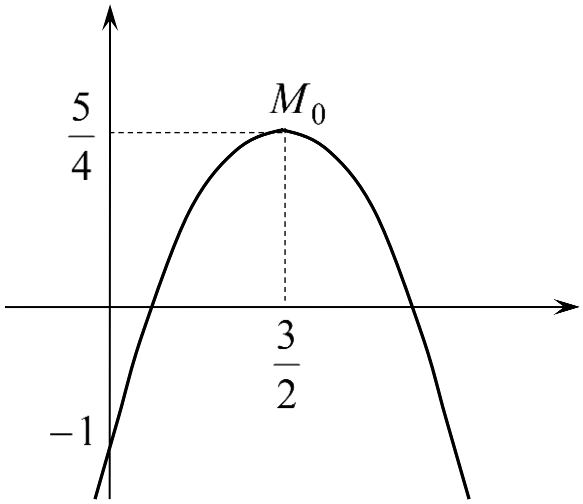


Рис. 6

Задача 10. Постройте график квадратичной функции $y = -x^2 + 3x - 1$.

Решение. $y=-x^2+3x-1=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$, следовательно, $M_0\left(\frac{3}{2};\frac{5}{4}\right)$ – вершина параболы. Ветви параболы направлены вниз, так как $a=-1<0$:



Задачи для самостоятельного решения

Задание 7. Постройте графики квадратичных функций:

1. $y=x^2-2x+3$;   2. $y=-x^2+5x-3$.

Задание 8. Не находя корней уравнения $3x^2+x-1=0$, найдите величину суммы их квадратов.

Задание 9. Не решая уравнение $x^2-x-2=0$, найдите значения выражений $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ и $x_1^3+x_2^3$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения.

Задание 10. Выясните, при каких значениях параметра *m* уравнение $(m-2)x^2-4x+m-5=0$ имеет два различных действительных корня.

Задание 11. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $ax^2+2(a-2)x+3a+4=0$ отрицательные?

Задание 12. Решите уравнение

$$\left(x^2+4x-15\right)^2+12\left(x^2+4x-15\right)-108=0.$$

Задание 13. Упростите выражения:

1. $\left(\frac{x-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}+x^{-1/2}}-\frac{2}{x^{3/2}}\right)^2;$

2. $\frac{x+1}{x^3+x^2+x}:\frac{1}{x^4-x}-x^2;$

3. $\left(\frac{8a^3+b^3}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b^{-1}}\right):\frac{a^2}{2a-b}.$

Ответы

8. $\frac{7}{9}$; **9.** $-\frac{1}{2}$; 7; **10.** $m\in(1;2)\cup(2;6)$;

11. $\left(-2-\sqrt{6};-\frac{4}{3}\right)$; **12.** -7; -3; -1; 3; **13.1.** x; **13.2.** -1; **13.3.** $\frac{1}{2}$.