Тема 2
Алгебраические выражения

Степень с натуральным показателем $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \quad n \in \mathbf{N}$ (a – основание степени, n – показатель степени).

***Свойства степени с натуральным показателем*:**

1°. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ – при перемножении степени с одинаковым основанием показатели степеней складываются.

2°. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, n > m$ – при делении степеней с одинаковым основанием из показателя числителя вычитается показатель знаменателя.

3°. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ – при возведении степени в степень показатели перемножаются.

4°. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ – при перемножении степеней с одинаковым показателем основания перемножаются.

5°. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ – при делении степеней с одинаковым показателем основание числителя делится на основание знаменателя.

***Формулы сокращённого умножения*:**

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы);

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности);

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (разность квадратов);

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы);

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности);

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов);

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов).

Степень с целым показателем $a^k, k \in Z$:

1) если $k = n,\ n \in \mathbf{N}$, то $a^k = a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$;

2) если $k = -n,\ n \in \mathbf{N},\ \ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, например, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$;

3) если $k = 0$, то по определению $a^0 = 1$.

Нетрудно убедиться, что свойства $1^\circ - 5^\circ$ верны и для степени с целым показателем.

Действие, обратное возведению в натуральную степень, называется *извлечением корня*. С помощью этого действия по данной степени и её показателю ищется основание степени. *Извлечь корень степени* n из числа a – это значит найти такое число *x*, которое после возведения в степень n даёт само число *a*.

Неотрицательное значение корня чётной степени из неотрицательного числа называется *арифметическим корнем*.

Степень с дробным показателем $a^{\frac{m}{n}}$ определяется как $\sqrt[n]{a^m}$, то есть $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$; $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ при $a \ge 0$.

***Свойства арифметического корня*:**

1°. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

2°. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \quad (b \ne 0)$.

3°. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.

4°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

5°. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$.

6°. $\sqrt[n]{a^n} = a \quad (a \ge 0)$.

7°. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

8°. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \ge 0)$.

Задача 4. Вычислите: $\left(\dfrac{2}{\sqrt{10}+5} + \dfrac{5}{\sqrt{10}-2} - \dfrac{7}{\sqrt{10}}\right) \cdot 3$.

Решение.

1. Умножим числитель и знаменатель первой стоящей в скобках дроби на сопряженное знаменателю выражение, то есть на $\sqrt{10} - 5$. В результате в знаменателе этой дроби получим разность квадратов и тем самым освободимся от иррациональности в нём:

$$\frac{2}{\sqrt{10}+5}=\frac{2\left(\sqrt{10}-5\right)}{\left(\sqrt{10}+5\right)\left(\sqrt{10}-5\right)}=\frac{2\left(\sqrt{10}-5\right)}{10-25}=-\frac{2\left(\sqrt{10}-5\right)}{15}.$$

2. Аналогичным образом поступим со второй дробью:

$$\frac{5}{\sqrt{10}-2}=\frac{5\left(\sqrt{10}+2\right)}{\left(\sqrt{10}-2\right)\left(\sqrt{10}+2\right)}=\frac{5\left(\sqrt{10}+2\right)}{10-4}=\frac{5\left(\sqrt{10}+2\right)}{6}.$$

3. $\dfrac{7}{\sqrt{10}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$.

4. $-\dfrac{2\left(\sqrt{10}-5\right)}{15}+\dfrac{5\left(\sqrt{10}+2\right)}{6}-\dfrac{7\sqrt{10}}{10}=$

$$=\frac{-4\left(\sqrt{10}-5\right)+25\left(\sqrt{10}+2\right)-21\sqrt{10}}{30}=$$

$$=\frac{-4\sqrt{10}+20+25\sqrt{10}+50-21\sqrt{10}}{30}=\frac{70}{30}=\frac{7}{3}.$$

5. $\dfrac{7}{3}\cdot 3=7$.

Ответ: 7.

Задача 5. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

Числитель и знаменатель дроби умножим на сопряженное знаменателю выражение:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt[4]{2}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{((1+\sqrt{2})-\sqrt[4]{2})((1+\sqrt{2})+\sqrt[4]{2})}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt[4]{2})^2}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{1+2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{3+\sqrt{2}}.$$

Ещё раз умножаем числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю выражение:

$$\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})(3-\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})(3-\sqrt{2})}{9-2}=$$
$$=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})(3-\sqrt{2})}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{(1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})(3-\sqrt{2})}{7}$.

Тождественные преобразования алгебраических выражений

Алгебраическим выражением называется выражение, в котором числа и буквы соединены действиями сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения арифметического корня. *Переменные величины* (или просто *переменные*) в алгебраическом выражении обозначаются буквами (обычно латинскими, реже – греческими). Иногда постоянные величины (*константы*) тоже обозначаются буквами, например число π. Если вместо всех переменных подставить некоторые числа и произвести указанные действия, то получим число, называемое *численным значением* алгебраического выражения.

К алгебраическим операциям (действиям) относятся арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление), а также операции возведения в степень (с целым показателем) и извлечения корня (натуральной степени). Порядок выполнения операций, если он не изменен расстановкой скобок, следующий: возведение в степень, извлечение корня, умножение и деление, сложение и вычитание.

Совокупность всех возможных численных значений переменных, при которых указанные в алгебраическом выражении операции можно выполнить, называется *областью допустимых значений* переменных (ОДЗ). Только для допустимых значений переменных алгебраическое выражение имеет смысл.

Если два выражения, содержащие одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то они называются *тождественно равными*. Так, выражения $(a+b)^2$ и $a^2+2ab+b^2$ являются тождественно равными при любых значениях

a и b, а выражения $\frac{x^2-4}{x-2}$ и $x+2$ тождественно равны при всех значениях x, не равных 2 $(x \neq 2)$.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется *тождественным преобразованием*. Применяя тождественные преобразования к алгебраическим выражениям, входящим в уравнение, мы приводим уравнение к более простому виду. В этом заключается общий метод решения уравнений.

Для упрощения алгебраических выражений используются формулы сокращенного умножения, свойства степеней и арифметических корней, а также процедура разложения многочлена на множители.

Разложение алгебраических выражений на множители

Разложить алгебраическое выражение на множители – значит преобразовать его в произведение двух или нескольких сомножителей.

Среди методов разложения на множители отметим три следующие:

1. Вынесение общего множителя за скобки:

$$ab - 5a^2c + ad = a(b - 5ac + d).$$

2. Метод группировки:

$$xz + yz + 2xt + 2yt = z(x+y) + 2t(x+y) = (z+2t)(x+y).$$

3. Разложение на множители с применением формул сокращенного умножения:

$$\frac{1}{16} - 81x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - (9x)^2 = \left(\frac{1}{4} - 9x\right)\left(\frac{1}{4} + 9x\right).$$

Задача 6. Разложите на множители следующие многочлены:

а) $x^2 - 2x - 24$; б) $10ay - 5by + 2ax - bx$;

в) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$; г) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

Решение.

а) $x^2 - 2x - 24 = \left(x^2 - 2x + 1\right) - 25 = (x-1)^2 - 5^2 =$

$= ((x-1)-5)((x-1)+5) = (x-6)(x+4)$;

б) $10ay - 5by + 2ax - bx = 5y(2a-b) + x(2a-b) =$

$= (2a-b)(5y+x)$;

в) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x+6) =$

$= x^2(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x^2+3)$;

г) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + x - 3 =$

$= (x^3 - 3x^2) - (2x^2 - 6x) + (x-3) =$

$= x^2(x-3) - 2x(x-3) + (x-3) =$

$= (x-3)(x^2 - 2x + 1) = (x-3)(x-1)^2$.

Задача 7. Упростите выражение:

$$\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left((x-y)^2+xy\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left((x+y)^2-xy\right)\right]\cdot\frac{x}{2y^2}.$$

Решение.

1. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left((x-y)^2+xy\right) = \frac{y+x}{xy}(x^2 - xy + y^2) = \frac{y^3+x^3}{xy}$.

2. $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left((x+y)^2-xy\right) = \frac{y-x}{xy}(x^2 + xy + y^2) = \frac{y^3-x^3}{xy}$.

3. $\frac{y^3+x^3}{xy} + \frac{y^3-x^3}{xy} = \frac{2y^3}{xy} = \frac{2y^2}{x}$.

4. $\frac{x}{2y^2}\cdot\frac{2y^2}{x} = 1$. *Ответ*: 1.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 4. Разложите на множители следующие многочлены:

1. $a^2-4a-12$; 2. $-6a-a^2-9$; 3. a^3-8+6a^2-12a.

Задание 5. Выделите полный квадрат трёхчленов:

1. a^2-6a+8; 2. $3x^2+x-1$.

Задание 6. Сократите дроби: 1. $\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}$; 2. $\dfrac{x^3+2x^2+3x+6}{x^3-x^2+3x-3}$.

Ответы

4.1. $(a-6)(a+2)$; **4.2.** $-(a+3)^2$; **4.3.** $(a-1)(a+4-2\sqrt{3})(a+4+2\sqrt{3})$;

5.1. $(a-3)^2-1$; **5.2.** $3\left(a+\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{13}{12}$; **6.1.** $\dfrac{4x+1}{x-3}$; **6.2.** $\dfrac{x+1}{x-1}$;