

Тема 22

Задачи на движение

При решении текстовых задач необходимо перевести условие на формальный, математический язык. Для этого в случае необходимости неизвестную величину (удобнее ту, которую надо будет записывать в ответ) обозначить какой-либо буквой, а затем, читая ещё раз условие задачи, все величины, о которых идёт речь, через неё выразить. При этом естественным образом получается уравнение, которое надо решить. Особое внимание следует обращать на единицы измерения данных и ответа.

Задача 1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 6 часов позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Пусть скорость велосипедиста x км/ч, тогда скорость автомобиля $x + 40$ км/ч.

Посчитаем время каждого по формуле $t = \frac{S}{v}$, где S – путь, v – скорость.

Поскольку велосипедист прибыл на 6 часов позже, его время на 6 часов больше.

Получаем уравнение $\frac{75}{x} - \frac{75}{x + 40} = 6$.

Избавимся от знаменателей, умножая обе части уравнения на $x(x + 40)$, получим $75x + 75 \cdot 40 - 75x = 6x(x + 40)$.

$$75 \cdot 40 = 6x(x + 40) \Rightarrow x(x + 40) = 25 \cdot 20 \Rightarrow x^2 + 40x - 500 = 0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 10$, $x_2 = -50$.

Ответ: 10.

Задача 2. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Пусть скорость лодки в неподвижной воде x км/ч, тогда скорость по течению $x + 1$ км/ч, скорость против течения $x - 1$ км/ч.

Посчитаем время «туда» и время «обратно» и составим уравнение, учитывая, что на обратный путь (по течению) потребовалось на 2 часа меньше:

$$t_{\text{туда}} = \frac{255}{x - 1}, t_{\text{обратно}} = \frac{255}{x + 1}, \frac{255}{x - 1} - \frac{255}{x + 1} = 2.$$

Избавимся от знаменателей, умножая обе части уравнения на $(x - 1)(x + 1)$, получим $255x + 255 - 255x + 255 = 2(x - 1)(x + 1)$.

$$2 \cdot 255 = 2(x-1)(x+1) \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow x = 16.$$

Ответ: 16.

Задача 3. От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью, на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Пусть скорость первого теплохода x км/ч, тогда скорость второго $x+1$ км/ч.

Посчитаем время каждого теплохода и составим уравнение, учитывая, что второй отправился на час позже, а прибыли в конечный пункт они одновременно, значит, время второго на 1 час меньше: $t_1 = \frac{420}{x}$, $t_2 = \frac{420}{x+1}$,

$$\frac{420}{x} - \frac{420}{x+1} = 1.$$

Избавимся от знаменателей, умножая обе части уравнения на $x(x+1)$, получим $420x + 420 - 420x = x(x+1)$

$$\Rightarrow x^2 + x - 420 = 0 \Rightarrow x_1 = 20, x_2 = -21..$$

Ответ: 20.

Заметим, что похожий метод решения можно применять и в задачах на работу, когда объём работы можно понимать как расстояние, а производительность труда (работа, выполненная в единицу времени) – как скорость. Попробуйте следующую задачу решить самостоятельно.

Задача 4. На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: 10.

Некоторые текстовые задачи можно решать, не составляя уравнения, например, следующую.

Задача 5. Из городов А и В, расстояние между которыми равно 330 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 180 км от города В. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города А. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Расстояние, которое проехал автомобиль, двигавшийся из А, равно $330\text{км} - 180\text{км} = 150\text{км}$, и он проехал этот путь за 3 часа. Значит, его скорость 50 км/ч.

Ответ: 50.

Задача 6. Товарный поезд каждую минуту проезжает на 750 метров меньше, чем скорый, и на путь в 180 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Пусть скорость товарного поезда x км/ч. Чтобы выразить скорость пассажирского, необходимо 750 метров в минуту (разность скоростей) перевести в км/ч: $750 \text{ м/мин} = \frac{750 \cdot 60}{1000} = 45 \text{ км/ч}$, тогда скорость пассажирского поезда $x + 45$ км/ч.

Посчитаем время каждого на преодоление расстояния 180 км и составим уравнение, учитывая, что товарному поезду надо на 2 часа больше:

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x + 45} = 2.$$

Разделим обе части уравнения на 2 и избавимся от знаменателей, умножая обе части на $x(x + 45)$, получим $90x + 90 \cdot 45 - 90x = x(x + 45)$

$$\Rightarrow x^2 + 45x - 90 \cdot 45 = 0 \Rightarrow x_1 = 45, x_2 = -90.$$

Ответ: 45.

Ещё одна задача, для решения которой не требуется решать уравнение. Заметим, что когда два тела двигаются навстречу друг друга, скорость их сближения равна сумме скоростей, а при движении в одну сторону (в случае различных скоростей) они удаляются друг от друга со скоростью, равной разности скоростей. Это легко понять, если систему отсчёта «привязывать» не к земле, а к одному из участников движения.

Задача 7. Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

Решение: Скорость, с которой быстрый пешеход удаляется от медленного – разность скоростей, т.е. 1,5 км/ч, тогда расстояние 300 м = 0,3 км между ними возникнет через

$$\frac{0,3}{1,5} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ ч} = 12 \text{ мин.}$$

Ответ: 12.

Определённую трудность представляют задачи на движение по кругу. В них надо иметь в виду, что если тело, движущееся с большей скоростью, догоняет более медленное, то пройденное расстояние отличается на целый круг. Рассмотрим пример такого движения.

Задача 8. Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 30 минут он еще не вернулся в пункт А и из пункта А следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в

первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Пусть скорость мотоциклиста x км/ч. Выразим скорость велосипедиста. Заметим, что в первый раз мотоцикл догнал велосипед через $10\text{мин} = \frac{1}{6}$ ч после своего старта. За это время мотоцикл проехал $\frac{x}{6}$ км.

Велосипед это же расстояние преодолел за $40\text{ мин} = \frac{2}{3}$ ч. Значит, его

скорость $\frac{3x}{6 \cdot 2} = \frac{x}{4}$ км/ч. После этой встречи через полчаса состоялась вторая, значит, пройденный путь отличается на целый круг. Получаем уравнение.

$$x \cdot 0,5 - \frac{x}{4} \cdot 0,5 = 30 \Rightarrow \frac{4x - x}{8} = 30 \Rightarrow x = 80.$$

Ответ: 80.

Задача 9. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метрам, за 1 минуту. Найдите длину поезда в метрах.

Решение: Можно считать, что 1 минута – это время между моментом, когда машинист поезда поравнялся с началом лесополосы, и моментом, когда проводник последнего вагона поравнялся с её концом. Значит, пройденный за 1 мин путь – это сумма длин лесополосы и поезда. Выразим скорость

$$\text{поезда в м/мин: } 60\text{ км/ч} = \frac{60 \cdot 1000}{60} = 1000\text{ м/мин.}$$

$$\text{Пройденный путь } 1000\text{ м/мин} \cdot 1\text{ мин} = 1000\text{ м.}$$

$$\text{Длина поезда } 1000\text{ м} - 400\text{ м} = 600\text{ м.}$$

Ответ: 600.

Последний тип задач, который мы рассмотрим – это задачи на нахождение средней скорости. Типичная ошибка при решении таких задач – вместо средней скорости считают среднее арифметическое данных скоростей (т.е. находят сумму чисел и делят на их количество).

Средняя скорость – это скорость, вычисленная в предположении, что тело двигалось равномерно, т.е. она равна отношению пройденного пути к затраченному на это времени.

Задача 10. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть – со скоростью 120 км/ч, а последнюю – со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Пусть вся трасса $3S$ км, тогда её треть S км. Вычислим время автомобиля:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{S}{60} + \frac{S}{120} + \frac{S}{110} = \frac{22S + 11S + 12S}{11 \cdot 120} = \frac{45S}{11 \cdot 120} = \frac{3S}{11 \cdot 8}.$$

Тогда средняя скорость $v_{\text{ср}} = 3S : \frac{3S}{11 \cdot 8} = 88 \text{ км/ч}$.

Ответ: 88.