Тема 6

Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами

Выражение вида $F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, где $a_0,a_1,...,a_n$ – целые числа, $a_0\neq 0$, n – натуральное число, x – некоторый символ, называется *многочленом степени n с целыми коэффициентами от переменной x.*

Число c называется *корнем многочлена* $F(x)$, если $F(c)=0$.

Справедливо следующее

Утверждение. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $F(x)$, то p – делитель свободного члена a_n, а q – делитель старшего коэффициента a_0. В частности, при $a_0=1$ рациональные корни многочлена будут целыми числами. (В качестве иллюстрации можно вспомнить теорему Виета о корнях приведенного квадратного уравнения.) Следовательно, если мы хотим найти рациональные корни уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$, то достаточно проверить все делители числа a_n (как положительные, так и отрицательные).

Задача 8. Разложите на множители многочлен x^3+4x^2+x-6.

Решение. Чтобы разложить многочлен на множители, надо попытаться найти его корни. Проверим делители свободного члена, то есть числа 6. Видим, что число 1 является корнем, следовательно, один из сомножителей равен $x-1$. Представим исходный многочлен в виде

$$x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6=x^2(x-1)+5x(x-1)+6(x-1)=$$
$$=(x-1)(x^2+5x+6).$$

Осталось разложить на множители квадратный трёхчлен, для этого найдём его корни: $x_1=-2$, $x_2=-3$. Отсюда

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

Ответ: $x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$.

Задача 9. Разложите на множители многочлен $x^5+5x^3-6x^2$.

Решение. Вынесем за скобки x^2, в скобках получим многочлен x^3+5x-6, для которого число 1 является корнем. Отсюда имеем

$$x^5+5x^3-6x^2=x^2\left(x^3+5x-6\right)=x^2\left(x^3-x^2+x^2-x+6x-6\right)=$$

$$=x^2\left(x^2(x-1)+x(x-1)+6(x-1)\right)=x^2(x-1)\left(x^2+x+6\right).$$

Дальнейшее разложение невозможно, так как трёхчлен x^2+x+6 имеет отрицательный дискриминант.

Ответ: $x^5+5x^3-6x^2=x^2(x-1)\left(x^2+x+6\right)$.

В приведенных примерах после нахождения корня $x=1$ многочлен переписывался в таком виде, чтобы множитель $x-1$ можно было вынести за скобки. Для этой же цели можно разделить «уголком» многочлен на $x-1$.

Задача 10. Разложите на множители многочлен $5x^3+14x^2+12x+8$.

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=-2$ – корень. Действительно,

$$5\cdot(-2)^3+14\cdot(-2)^2+12\cdot(-2)+8=-40+56-24+8=0.$$

Значит, многочлен делится на $x+2$ без остатка. Имеем

$$\begin{array}{r|l}
-\;5x^3+14x^2+12x+8 & \;x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{5x^3+10x^2\qquad\qquad} & 5x^2+4x+4 \\
-\;4x^2+12x\quad & \\
\underline{4x^2+8x\quad} & \\
-\;4x+8 & \\
\underline{4x+8} & \\
0 &
\end{array}$$

Получили частное $5x^2+4x+4$ и остаток 0. Дальнейшее разложение невозможно.

Ответ: $5x^3+14x^2+12x+8=(x+2)\left(5x^2+4x+4\right)$.

В общем случае при делении многочлена $F(x)$ на многочлен $G(x)$ (степень $F(x)$ не меньше степени $G(x)$) старший член $F(x)$ делят на старший член $G(x)$ и получают старший член частного $Q(x)$. Найденный старший член $Q(x)$ умножают на $G(x)$ и полученный многочлен вычитают из $F(x)$. В результате получается некоторый многочлен $R_1(x)$, степень которого меньше степени $F(x)$. Если она меньше степени $G(x)$, то $R_1(x)$ – остаток, если нет, то деление продолжается.

Задача 11. Разделите многочлен $F(x) = -3x^5 + 5x^4 + 3x - 1$ на многочлен $G(x) = -x^2 + x + 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & -3x^5 + 5x^4 + 3x - 1 & -x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{-3x^5 + 3x^4 + 3x^3} & 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \\
 & \quad - \; 2x^4 - 3x^3 + 3x - 1 & \\
 & \quad \underline{2x^4 - 2x^3 - 2x^2} & \\
 & \qquad - \; -x^3 + 2x^2 + 3x - 1 & \\
 & \qquad \underline{-x^3 + x^2 + x} & \\
 & \qquad\quad - \; x^2 + 2x - 1 & \\
 & \qquad\quad \underline{x^2 - x - 1} & \\
 & \qquad\qquad 3x &
\end{array}
$$

Здесь $R_1(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x - 1$, степень больше 2;

$R_2(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 1$, степень больше 2;

$R_3(x) = x^2 + 2x - 1$, степень равна 2;

$R_4(x) = 3x$ – остаток, его степень меньше степени $G(x)$, равной 2.

Таким образом, $F(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$, где $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ – частное, $R(x) = R_4(x) = 3x$ – остаток.

Важное замечание. Делимое и делитель должны быть записаны по убывающим степеням x.

При делении многочлена $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ на двучлен $x - c$ применяется также метод *сокращенного деления*, называемый *схемой Горнера*.

Пусть $F(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$, где $Q(x)$ – частное (его степень на единицу меньше степени $F(x)$), r – остаток (многочлен нулевой степени, то есть число).

Положим $Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$. Получим

$$F(x)=(x-c)\left(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+..+b_{n-1}\right)+r=$$
$$=b_0x^n+(b_1-b_0c)x^{n-1}+(b_2-b_1c)x^{n-2}+...+(b_{n-1}-b_{n-2}c)x+(r-b_{n-1}c).$$

Приравнивая коэффициенты полученного многочлена к соответствующим коэффициентам $F(x)$, получим

$$\begin{aligned}
&a_0=b_0;\\
&a_1=b_1-b_0c;\\
&a_2=b_2-b_1c;\\
&...\\
&a_{n-1}=b_{n-1}-b_{n-2}c;\\
&a_n=r-b_{n-1}c.
\end{aligned}$$

Отсюда находим формулы для коэффициентов частного $b_0, b_1, ...b_{n-1}$ и остаток r:

$$\begin{aligned}
&b_0=a_0;\\
&b_1=b_0c+a_1;\\
&b_2=b_1c+a_2;\\
&...\\
&b_{n-1}=b_{n-2}c+a_{n-1};\\
&r=b_{n-1}c+a_n.
\end{aligned}$$

Практически вычисления проводят по следующей схеме: в строку выписывают коэффициенты многочлена $F(x)$, расположенного по убывающим степеням (важно: если член какой-либо степени отсутствует, то пишут 0), внизу – горизонтальная черта, слева – вертикальная. В следующей строке слева от черты записывают c, а справа строго под коэффициентами $F(x)$ – получающиеся коэффициенты $Q(x)$, причем первый коэффициент сносят, а каждый следующий получается умножением предыдущего числа этой строки на c и прибавлением к полученному результату числа первой строки, стоящего над искомым.

Задача 12. Разделить многочлен $x^5-3x^3+2x^2-x+1$ на $x+1$.

Решение. Применим *схему Горнера:*

	1	**0**	**-3**	**2**	**-1**	**1**
-1	**1**	**-1**	**-2**	**4**	**-5**	**6**

Ответ: частное $Q(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 5$, остаток равен 6.

Задача 13. Разделить многочлен $x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32$ на $x + 2$.

Решение. Применим *схему Горнера:*

	1	**0**	-4	**8**	**0**	**-32**
-2	**1**	**-2**	**0**	**8**	**-16**	**0**

Ответ: частное $Q(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$, остаток равен 0. Значит, –2 является корнем исходного многочлена.

Таким образом, схему Горнера удобно применять и для проверки, является ли число корнем многочлена. В этом случае последний коэффициент второй строки (остаток, равный $F(c)$) получается равным нулю.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. *Разложить на множители многочлены*:

1. $8x^4 + x^3 + 64x + 8$;
2. $5x^3 + 18x^2 - 10x - 8$;
3. $x^4 + 14x^3 + 71x^2 + 154x + 120$;
4. $2x^3 + x^2 - 4x - 2$;
5. $x^6 - 6x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 20x - 12$;
6. $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$.

Ответы

1.1. $8(x+2)\left(x+\frac{1}{8}\right)(x^2 - 2x + 4)$;

1.2. $5(x+4)\left(x-\frac{1-\sqrt{11}}{5}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{11}}{5}\right)$; **1.3.** $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$;

1.4. $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$; **1.5.** $(x-1)^2(x-2)(x+3)(x^2+x+2)$;

1.6. $2(x-1)^2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.