## Тема 9

## Системы уравнений и неравенств

### *Иррациональные системы уравнений*

Система уравнений, содержащая радикалы, называется *иррациональной.*

Решение иррациональных систем уравнений чаще всего сводится к решению рациональных систем с помощью замены переменных.

***Задача 29.*** Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=\dfrac{\sqrt{xy}}{2}, \\ x+y=5. \end{cases}$

*Решение.* Положим $\sqrt{x}=u, \sqrt{y}=v$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} u-v=\dfrac{uv}{2}, \\ u^2+v^2=5. \end{cases}$$

Получили рациональную систему уравнений. Решать её методом подстановки неудобно, так как получатся громоздкие выражения. Здесь удобно сделать ещё одну замену: $u-v=t, uv=s$. Чтобы записать новую систему, необходимо выразить сумму квадратов неизвестных через их разность и произведение. Имеем $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Отсюда $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$. Итак, система уравнений с новыми неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} t=\dfrac{s}{2}, \\ t^2+2s=5. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения $s$ и подставляя во второе, получим $t^2+4t-5=0$. Легко видеть, что корни этого уравнения: –5 и 1. Следовательно, имеем две системы: $\begin{cases} t=-5, \\ s=-10 \end{cases}$ и $\begin{cases} t=1, \\ s=2. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} u-v=-5, \\ uv=-10 \end{cases}$ или $\begin{cases} u-v=1, \\ uv=2 \end{cases}$. Если переписать их в виде $\begin{cases} u+(-v)=-5, \\ u(-v)=10 \end{cases}$ и $\begin{cases} u+(-v)=1, \\ u(-v)=-2 \end{cases}$ соответственно, то опять получим выражение, похожее на теорему Виета. Здесь $u$ и $-v$ должны являться корнями приведенных квадратных уравнений $r^2+5r+10=0$ и $r^2-r-2=0$ соответственно. Первое из этих уравнений имеет отрицательный дискриминант, а второе имеет два корня: 1 и –2. Следовательно, $u=1, -v=-2$ или $u=-2, -v=1$. Второй случай невозможен по смыслу первой замены, так как $u$ и $v$ – неотрицательные. Значит, $\sqrt{x}=1, \sqrt{y}=2$. Отсюда $x=1, y=4$.

*Ответ:* (1;4).

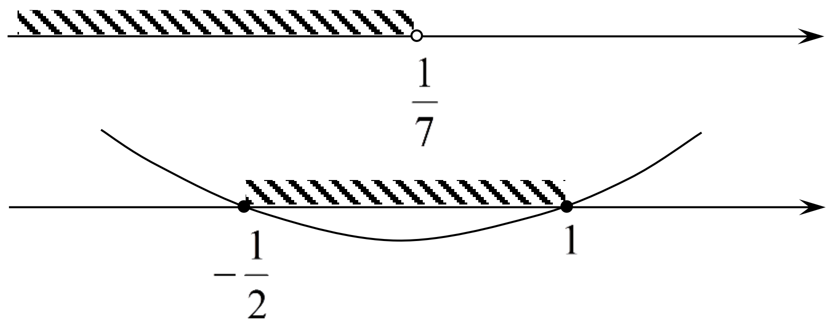
***Системы неравенств***

Решением системы неравенств служит общая часть решений всех неравенств, входящих в систему. Следовательно, необходимо решить каждое из неравенств, а затем выбрать те значения неизвестного, которые входят в каждое из множеств решений.

***Задача 30.*** Решите систему неравенств $\begin{cases} 8x-2<x-1, \\ 2x^2-x-1\le 0. \end{cases}$

*Решение.* Данная система равносильна системе $\begin{cases} 7x<1, \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)\le 0. \end{cases}$

Изобразим на числовых прямых решения каждого из неравенств системы, причём расположим рисунки строго один под другим, тогда будет легко увидеть множество решений системы. Имеем




Решением системы служат те значения неизвестного, которые попадают в штрихованные области на обоих рисунках, то есть $-\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{7}$.

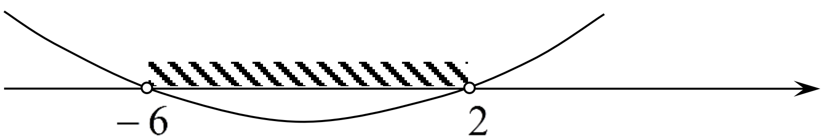
*Ответ:* $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{7}\right)$.

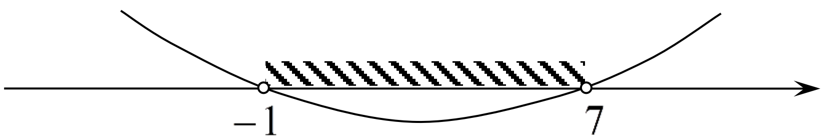
***Задача 31.*** Найти все значения $a$, при которых множеством всех решений системы $\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2, \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} > -3 \end{cases}$ является вся числовая прямая.

*Решение.* Квадратный трёхчлен, стоящий в знаменателях дробей, имеет отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент, поэтому можно каждое из неравенств умножить на знаменатель, получим

$$\begin{cases} x^2+ax-2 < 2\left(x^2-x+1\right), \\ x^2+ax-2 > -3\left(x^2-x+1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-(a+2)x+4>0, \\ 4x^2+(a-3)x+1>0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна исходной, и требуется найти те значения $a$, при которых решениями системы, а значит, каждого из неравенств системы, служат все действительные числа. На языке графиков это означает, что обе параболы, представляющие квадратные трехчлены в левых частях неравенств, должны располагаться выше оси абсцисс (см. рис 1 на с. 21). Значит, оба дискриминанта должны быть отрицательны. Получаем систему неравенств относительно $a$: $\begin{cases} (a+2)^2-16<0, \\ (a-3)^2-16<0. \end{cases}$ Разлагая на множители левые части, имеем $\begin{cases} (a+2-4)(a+2+4)<0, \\ (a-3-4)(a-3+4)<0, \end{cases}$ или $\begin{cases} (a-2)(a+6)<0, \\ (a-7)(a+1)<0. \end{cases}$ Решая каждое из неравенств этой системы методом интервалов, получаем



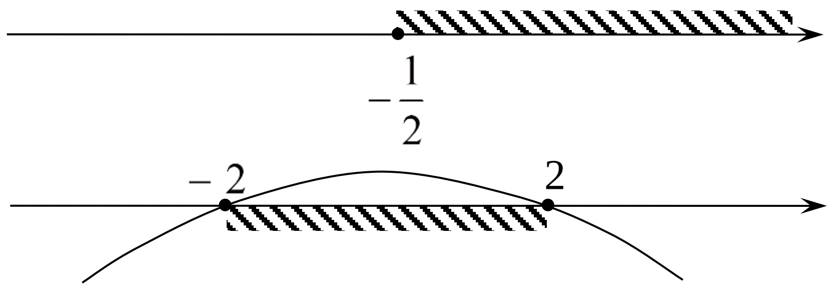




*Ответ:* $x \in (-1;2)$.

При решении систем иррациональных неравенств необходимо начать с вопроса о допустимых значениях неизвестного, а затем решать неравенства с учётом этих значений. Кроме того, бывает полезно при решении следующего неравенства учитывать ответ, полученный в предыдущем, или даже решать неравенства параллельно.

***Задача 32.*** Решите систему неравенств $\begin{cases} \sqrt{2x^5+5x-6} > 2-x, \\ \sqrt{2x+1} < \dfrac{2(x+2)}{2-x} \end{cases}$.

*Решение.* ОДЗ: $\begin{cases} 2x^5+5x-6 \ge 0, \\ 2x+1 \ge 0, \\ \dfrac{2(x+2)}{2-x} > 0. \end{cases}$ Первые два условия следуют из того, что эти выражения стоят под корнем четной степени, третье должно выполняться, так как дробь строго больше корня четной степени, который является неотрицательным числом. Решая систему из второго и третьего неравенства методом интервалов, получаем




Отсюда $-\dfrac{1}{2} \le x < 2$. Легко заметить, что первое неравенство не выполняется при неположительных значениях переменной, следовательно, можно сузить промежуток: $0 < x < 2$. При этих условиях правая часть первого неравенства исходной системы положительна, значит, можно обе части возвести в квадрат. Получим $2x^5+5x-6 > 4-4x+x^2$, или $2x^5-x^2+9x-10>0$. Легко заметить, что 1 – корень многочлена, стоящего в левой части. Следовательно, его можно разложить на множители. Итак, первое неравенство системы, с учетом ОДЗ, равносильно неравенству

$(x-1)\left(2x^4+2x^3+2x^2+x+10\right)>0$ (проверьте самостоятельно, используя деление «уголком» или схему Горнера). Заметим, что второй сомножитель положителен при $x>0$, поэтому $x-1>0$, то есть (с учётом ОДЗ) $1<x<2$. Осталось проверить, что при этих значениях второе неравенство справедливо. Действительно, обе функции $f(x)=\sqrt{2x+1}$ и $g(x)=\dfrac{2(x+2)}{2-x}$ являются монотонно возрастающими. При этом на промежутке $(1;2)$ $f(x)<f(2)=\sqrt{5}$, а $g(x)>g(1)=6$. Значит, для любой точки промежутка неравенство выполнено.

*Ответ:* $x\in(1;2)$.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задание 1.** *Решите систему уравнений*:

1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5,\\ x+y=35;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1,\\ xy=8;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=2,\\ x-2y+1=0;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=1,\\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5.\end{cases}$

**Задание 2.** *Решите систему неравенств*:

1) $\begin{cases} \sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}>1, \\ \sqrt{(x-1)(x+3)}\cdot\sqrt{1-x^2}\geq 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{4x-x^2}<4-x, \\ \sqrt{x+2}>\sqrt{8-x^2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{4x-7}<x, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4; \end{cases}$

4) $\sqrt{x^2-9x+20}\leq\sqrt{x-1}\leq\sqrt{x^2-13}$;

5) $\begin{cases} \sqrt{4-3x}\geq x, \\ \sqrt{x}+\sqrt{x-1}<5. \end{cases}$

## Ответы

**1.1.** $(1;16),\ (16;1)$; **1.2.** $(8;27),\ (27;8)$; **1.3.** $(8;1),\ (-1;-8)$; **1.4.** $(1;1)$;

**1.5.** $(1;76),\ (7;-8),\ \left(\frac{49}{64};\frac{41}{8}\right)$; **2.1.** 1; **2.2.** Нет решений; **2.3.** $\left[\frac{7}{4};5\right)$;

**2.4.** $\{4\}\cup[5;7]$; **2.5.** 1.