Тема 8

Иррациональные уравнения и неравенства

Иррациональное уравнение – это уравнение, содержащее радикалы. При решении таких уравнений можно попробовать избавиться от радикалов, возводя обе части уравнения в подходящую степень.

Важное замечание. При возведении в чётную степень могут получиться посторонние корни, поэтому нужно сделать проверку.

Задача 18. Решите уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$

Решение. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x+\sqrt{x+11}+2\sqrt{\left(x+\sqrt{x+11}\right)\left(x-\sqrt{x+11}\right)}+x-\sqrt{x+11}=16.$$

Отсюда $\sqrt{\left(x+\sqrt{x+11}\right)\left(x-\sqrt{x+11}\right)}=8-x.$

Возводя в квадрат и применяя формулу разности квадратов в левой части, получаем $x^2-x-11=64-16x+x^2.$ Отсюда $15x=75, x=5.$ Непосредственной проверкой убеждаемся, что 5 – корень.

Ответ: $x=5.$

В случае, когда уравнение содержит радикалы третьей и более высоких степеней, возведение в степень не всегда позволяет избавиться от них. Тогда бывает полезен метод «возврата к исходному уравнению».

Задача 19. Решите уравнение $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

Решение. Возводя обе части уравнения в третью степень, получим

$$1+\sqrt{x}+3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}+1-\sqrt{x}=8.$$

Приводя подобные и вынося за скобки общий множитель, получаем $3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)=6$. Выражение, стоящее в скобках, – это левая часть исходного уравнения, которая равна 2, поэтому последнее уравнение можно переписать в виде $6\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}=6,$ или $\sqrt[3]{1-x}=1,$ отсюда $1-x=1,$ $x=0.$

Выполнив проверку, получаем

Ответ: $x = 0$.

Это уравнение можно решить по-другому: положим $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = t$. Тогда $\sqrt{x} = 1 - t^3$, и исходное уравнение примет вид $\sqrt[3]{2-t^3} + t = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{2-t^3} = 2 - t \Rightarrow 2 - t^3 = 8 - 12t + 6t^2 - t^3$.

Или $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x = 0} \Rightarrow x = 0$.

Задача 20. Решите уравнение $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}} = 2$.

Решение. Обозначим $z = \sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}$, тогда исходное уравнение примет вид $z + \dfrac{1}{z} = 2$, откуда $z = 1$. Следовательно,

$$\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} = 1, \quad \frac{5-x}{x+3} = 1, \quad 5 - x = x + 3, \quad 2x = 2, \quad x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

При решении иррациональных неравенств, как и при решении уравнений, было бы удобно избавиться от корней путём возведения обеих частей неравенства в подходящую степень, однако при возведении в чётную степень знак неравенства может измениться (например, –3<1, но 9>1). Поэтому следует убедиться, что обе части неравенства неотрицательны. В противном случае надо применить другой способ решения.

Кроме того, полезно начинать решение с указания допустимых значений неизвестного, так как сделать проверку полученного ответа (как при решении уравнений) невозможно в случае, если ответом служит бесконечное множество чисел.

Задача 21. Решите неравенство $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x + 3 \ge 0, \\ x - 1 \ge 0, \\ x - 2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \ge 2.$

Обе части неравенства неотрицательны, можно возводить в квадрат:

$$x + 3 < x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(x-2)} + x - 2,$$

$$6 - x < 2\sqrt{(x-1)(x-2)}.$$

Далее необходимо рассмотреть два случая:

1-й случай. $6 - x < 0$. Поскольку справа стоит неотрицательное число, неравенство справедливо для всякого значения x. Следовательно, $x > 6$ – решение.

2-й случай. $6 - x \geq 0$. Обе части неравенства неотрицательны, можно возводить в квадрат:

$$36 - 12x + x^2 < 4x^2 - 12x + 8, \quad x^2 > \frac{28}{3}, \ |x| > \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Значит, $x < -2\sqrt{\frac{7}{3}}$ или $x > 2\sqrt{\frac{7}{3}}$. Первое множество не входит в ОДЗ, $2\sqrt{\frac{7}{3}} < x \leq 6$ – решение.

Объединяя найденные решения, получим

Ответ: $x \in \left(2\sqrt{\frac{7}{3}}, +\infty\right)$.

Задача 22. Решите неравенство $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$.

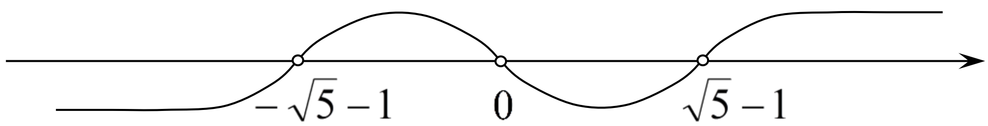
Решение. ОДЗ: $2 - x > 0, \ \ x < 2$.

Положим $\sqrt{2-x} = y$, получим $\frac{4}{y} - y < 2$, отсюда

$$\frac{4 - y^2 - 2y}{y} < 0, \ \ \frac{y^2 + 2y - 4}{y} > 0, \ \ \frac{(y+1)^2 - 5}{y} > 0,$$

$$\frac{\left(y + 1 - \sqrt{5}\right)\left(y + 1 + \sqrt{5}\right)}{y} > 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Отсюда $-1 - \sqrt{5} < y < 0$ или $y > \sqrt{5} - 1$.

По смыслу замены годится только второе неравенство. Итак, $\sqrt{2-x} > \sqrt{5} - 1$. Отсюда $2 - x > 5 - 2\sqrt{5} + 1, \ \ x < 2\sqrt{5} - 4$. Учитывая ОДЗ, получаем

Ответ: $x \in \left(-\infty; 2\sqrt{5} - 4\right)$.

При решении иррациональных уравнений и неравенств можно применять следующие эквивалентности:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge (g(x))^2, \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > (g(x))^2, \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le (g(x))^2, \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 23. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 + x} < 1 + 2x.$

Решение. Исходное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2x^2 + x < (1 + 2x)^2, \\ 2x^2 + x \ge 0, \\ 1 + 2x \ge 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

Ответ: $x \in [0; +\infty).$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 5. *Решите уравнения*:

1. $\dfrac{2x-5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}$;
2. $x-1=\sqrt{x+5}$;
3. $\sqrt{16+\sqrt{x+4}}=5$;
4. $21+\sqrt{2x-7}=x$;
5. $\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=4$;
6. $\sqrt[3]{5-\sqrt{x+15}}=1$;
7. $\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$;
8. $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$;
9. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$;
10. $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$;
11. $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;
12. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$;
13. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$;
14. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$;
15. $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=27-x$;
16. $x^2+3+\sqrt{x^2+3}=6$;
17. $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}=4$;
18. $(x+1)\sqrt{x^2-5x+5}=x+1$;
19. $\sqrt{x-5}+6=5\sqrt[4]{x-5}$;
20. $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3$;
21. $(x+3)(x+2)-4\sqrt{x^2+5x+2}=4$;
22. $\dfrac{1}{\sqrt{3x+10}}+\dfrac{6}{\sqrt{(x+2)(3x+10)}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$;
23. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;
24. $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$.

Задание 6. *Решите неравенства*:

1. $\sqrt{x-3}<x-2$;
2. $\sqrt{x^2-9}\le -1$;
3. $\sqrt{5-x}>\sqrt{x+1}$;
4. $\sqrt{2x^2+5x+11}\ge 3$;
5. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$;
6. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0$.
7. $\sqrt{x+8}>-1$;
8. $\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}<0$;
9. $\sqrt{x^2+x-2}<2$;
10. $\sqrt{x^2-24x}\le 5$;
11. $\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x+1}<3$;
12. $\sqrt{x^3+3x+4}>-2$;
13. $(x-1)\sqrt{x}<0$;
14. $\sqrt{2-\sqrt{x}}>1$;
15. $\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{2\sqrt{x+1}-5}\ge 0$;

Ответы

5.1. 7; **5.2.** 4; **5.3.** 77; **5.4.** 28; **5.5.** -1; **5.6.** 1; **5.7.** 7; **5.8.** Нет решений; **5.9.** 40; **5.10.** 9; **5.11.** $\frac{5}{4}$; **5.12.** 0; **5.13.** 9; **5.14.** 14; **5.15.** 25; **5.16.** ± 1; **5.17.** 2; 1,2; **5.18.** ± 1; 4; **5.19.** 21; 86; **5.20.** -45; 20; **5.21.** -7; 2; $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$; **5.22.** 62; **5.23.** 5; **5.24.** 3; **6.1.** $[3;+\infty)$; **6.2.** Нет решений; **6.3.** $[-1;2)$; **6.4.** $(-\infty;-2] \cup \left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$; **6.5.** $\left(1;\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$; **6.6.** $\left(\frac{\sqrt{34}-1}{2};+\infty\right)$; **6.7.** $[-8;+\infty)$; **6.8.** $[0;9)$; **6.9.** $(-3;-2]$; **6.10.** $[-1;0] \cup [24;25]$; **6.11.** $\left[\frac{4}{5};1\right)$; **6.12.** $[-1;+\infty)$; **6.13.** $(0;1)$; **6.14.** $[0;1)$; **6.15.** $[-1;5{,}25) \cup [8;+\infty)$.