Тема 10
Показательные уравнения и неравенства

§1. Свойства и график показательной функции

Функция вида $y = a^x$, где a – постоянное положительное число, не равное единице, называется *показательной*.

Перечислим основные свойства этой функции.

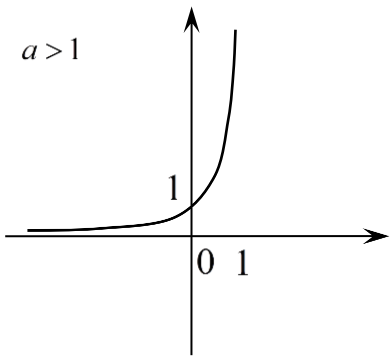
1) Функция задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$.
2) При любом положительном основании $a^0 = 1$. Следовательно, все графики показательной функции пересекают ось ординат в одной и той же точке $(0;1)$.
3) Функция является возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$. Причём, если $a > 1$, то $a^x < 1$ при $x < 0$ и $a^x > 1$ при $x > 0$; если $0 < a < 1$, то $a^x > 1$ при $x < 0$ и $a^x < 1$ при $x > 0$.
4) Непрерывна на всей числовой прямой $\mathbf{R}$.
5) Множеством значений функции $y = a^x$ является интервал $(0;+\infty)$. Таким образом, показательная функция положительна при любом значении аргумента x (график расположен выше оси Ox).

Построим график показательной функции при частных значениях основания a.

1. Пусть $a = 2$ и значит $a > 1$. Составим таблицу значений функции $y = 2^x$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

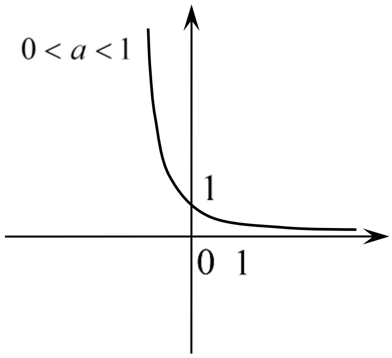
На основании этой таблицы построим график функции $y = 2^x$.



2. Пусть $a = \dfrac{1}{2}$ и значит $0 < a < 1$. Составим таблицу значений функции $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

На основании таблицы построим график функции $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.



Перечислим некоторые свойства степени, которые нам понадобятся при решении задач.

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ – при умножении степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются.

2. $a^x / a^y = a^{x-y}$ – при делении степеней с одинаковым основанием из показателя числителя вычитается показатель знаменателя.

3. $(a^x)^y = a^{xy}$ – при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются.

4. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

§2. Показательные уравнения

Показательным называется уравнение, содержащее неизвестное в показателе степени или в показателе и в основании степени.

1. Простейшим таким уравнением является уравнение вида

$$a^x = b, \text{ где } a > 0.$$

При $b \le 0$ это уравнение на множестве действительных чисел корней не имеет, так как $a^x > 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. При $b>0$ в силу свойства показательной функции это уравнение имеет единственное решение.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{3^x} = \dfrac{1}{\sqrt{27}}$.

Решение. $\left(3^x\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x = -3$.

Ответ: –3.

Задача 2. Решите уравнение $5^{x+1} + 5^x = 750$.

Решение. $5^x(5+1) = 750 \Rightarrow 6 \cdot 5^x = 750 \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$.

Ответ: 3.

Задача 3. Решите уравнение $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Решение.

$$4^x + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Rightarrow 4^x + 4^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^{x-\frac{1}{2}} \cdot \left(4^{\frac{1}{2}} + 1\right) = 3^{x-\frac{1}{2}} \cdot (3+1) \Rightarrow 3 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} = 4 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

2. Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Задача 4. Решите уравнение $4^{x^2-x+1} = 8^x$.

Решение.

$$2^{2(x^2-x+1)} = 2^{3x} \Rightarrow 2(x^2 - x + 1) = 3x \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 2.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$; 2.

Задача 5. Решите уравнение $2 \cdot \left(2^{3+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 16^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$.

Решение. ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1$.

$$2^{1+\frac{3+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}} = 2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}} \Rightarrow 1 + \frac{3+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow \frac{3(\sqrt{x})^2 - 8\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(\sqrt{x})^2 - 8\sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \in \text{ОДЗ}.$$

Ответ: 9.

3. Уравнения вида $Aa^{2x}+Ba^{x}+C=0$, где $A, B, C\in\mathbf{R}$ – константы.

Задача 6. Решите уравнение $3^{2x}+6\cdot 3^{x}-27=0$.

Решение. Введём переменную $t=3^{x}$, $t>0$: $t^{2}+6t-27=0\Rightarrow t_{1}=-9$ – посторонний корень; $t_{2}=3\Rightarrow 3^{x}=3\Rightarrow x=1$. *Ответ*: 1.

Задача 7. Решите уравнение $5^{2x-3}=2\cdot 5^{x-2}+3$.

Решение. Умножая обе части уравнения на 125, получим

$$5^{2x}=10\cdot 5^{x}+375\Rightarrow 5^{2x}-10\cdot 5^{x}-375=0.$$

Введём переменную $t=5^{x}$, $t>0$: $t^{2}-10t-375=0\Rightarrow t_{1}=-15$ – посторонний корень; $t_{2}=25\Rightarrow 5^{x}=25\Rightarrow x=2$. *Ответ*: 2.

4. Уравнения вида $Aa^{2x}+Ba^{x}b^{x}+Cb^{2x}=0$, где *A, B, C* – действительные числа.

Задача 8. Решите уравнение $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}$.

Решение. $3\cdot 4^{x}-5\cdot 6^{x}+2\cdot 9^{x}=0\Rightarrow 3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^{x}3^{x}+2\cdot 3^{2x}=0$.

Разделим обе части уравнения на 3^{2x}, получим

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+2=0.$$

Введём переменную $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$, $t>0$: $3t^{2}-5t+2=0\Rightarrow t_{1}=1;\ t_{2}=\frac{2}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1;\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{2}{3}\Rightarrow x=0;\ x=1.$ *Ответ*: 0; 1.

Задача 9. Решите уравнение $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=2\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде $2^{-\frac{2}{x}}+2^{-\frac{1}{x}}\cdot 3^{-\frac{1}{x}}-2\cdot 3^{-\frac{2}{x}}=0$ и разделим обе части полученного уравнения на $3^{-\frac{2}{x}}$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{x}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}-2=0$.

Введём переменную $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}$, $t>0$: $t^{2}+t-2=0\Rightarrow t_{1}=-2$ – посторонний корень; $t_{2}=1\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=1\ \Rightarrow -\frac{1}{x}=0\Rightarrow$ действительных решений нет.

Ответ: действительных решений нет.

5. Один частный случай.

Задача 10. Решите уравнение $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$.

Решение. Заметим, что $\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)=25-24=1$, следовательно,

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x}.$$

Введём переменную $t=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x$, $t>0$, получим:

$$t+\frac{1}{t}=10\Rightarrow t^2-10t+1=0\Rightarrow t=5\pm 2\sqrt{6}.$$

Делаем обратную замену:

1) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5+2\sqrt{6}$,

$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}=5+2\sqrt{6}$,

$\frac{x}{2}=1$,

$x=2$;

2) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5-2\sqrt{6}$,

$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$,

$\frac{x}{2}=-1$,

$x=-2$.

Ответ: $-2;\ 2$.

§3. Показательные неравенства

Простейшими показательными неравенствами являются неравенства

$$a^x>b,\ a^x<b,\ a^x\ge b,\ a^x\le b,$$

где a и b – заданные действительные числа, причём $a>0$.

Если $b>0$, то эти неравенства решаются при помощи логарифмирования на основании свойства монотонности показательной функции (если $a^{x_1}>a^{x_2}$, то при $a>1$, $x_1>x_2$, при $0<a<1$, $x_1<x_2$). Таким образом, если основание степени $a>1$, то при логарифмировании знак неравенства сохраняется. Если же основание $0<a<1$, то при логарифмировании знак неравенства меняется на противоположный. Например,

$$a^x>b \iff x>\log_a b \quad \text{при } a>1 \text{ и } b>0,$$

$$a^x>b \iff x<\log_a b \quad \text{при } 0<a<1 \text{ и } b>0,$$

$$a^x>b \iff x\in\mathbf{R} \quad \text{при } a>0 \text{ и } b<0.$$

Отметим также, что стандартные замены, позволяющие решить показательные уравнения, эффективны и при решении показательных неравенств.

Задача 11. Решите неравенство $7^{3x+2} > 49$.

Решение. Так как $7 > 1$, и значит, функция $y = 7^x$ возрастает, то неравенство $7^{3x+2} > 7^2$ равносильно неравенству $3x + 2 > 2 \Rightarrow x > 0$.

Ответ: $x > 0$.

Задача 12. Решите неравенство $(0{,}5)^{2x-1} > 0{,}125$.

Решение. Так как $0 < 0{,}5 < 1$, и значит, функция $y = 0{,}5^x$ убывает, то неравенство $(0{,}5)^{2x-1} > (0{,}5)^3$ равносильно неравенству $2x - 1 < 3 \Rightarrow x < 2$.

Ответ: $x < 2$.

Задача 13. Решите неравенство $3^{4x^2-3x+1/2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}$.

Решение. Так как $3 > 1$, и значит, функция $y = 3^x$ возрастает, то неравенство $3^{4x^2-3x+1/2} < 3^{40x^2}$ равносильно неравенству

$$4x^2 - 3x + \frac{1}{2} < 40x^2 \Rightarrow 72x^2 + 6x - 1 > 0 \Rightarrow 72\left(x + \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{12}\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{12}; +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$.

Задача 14. Решите неравенство $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^{x+1} - 5 \le 0$.

Решение. Переписав неравенство в виде $3 \cdot \left(2^x\right)^2 - 14 \cdot 2^x - 5 \le 0$ и выполнив стандартную замену $t = 2^x$, $t > 0$, получим квадратное неравенство:

$$3t^2 - 14t - 5 \le 0 \Rightarrow 3\left(t + \frac{1}{3}\right)(t - 5) \le 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} \le t \le 5.$$

Первое неравенство из двойного неравенства справедливо при всех действительных значениях t, таким образом, $t \le 5 \Rightarrow 2^x \le 5$.

Так как $2 > 1$, функция $y = 2^x$ возрастает, и неравенство $2^x \le 5$ равносильно неравенству $x \le \log_2 5$.

Ответ: $x \in (-\infty; \log_2 5]$.

Задача 15. Решите неравенство $16^x - 2 \cdot 12^x \le 3^{2x+1}$.

Решение. Так как $3^{2x} > 0$, то, разделив обе части неравенства $4^{2x} - 2\cdot 4^{x}\cdot 3^{x} - 3\cdot 3^{2x} \le 0$ на 3^{2x}, получим равносильное неравенство

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^{x} - 3 \le 0.$$

Положим $t = \left(\frac{4}{3}\right)^{x}$, $t > 0$. Получим $t^2 - 2t - 3 \le 0 \Rightarrow -1 \le t \le 3$. Первое неравенство выполняется при всех действительных значениях t. Тогда

$$t \le 3 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x} \le 3 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x} \le \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{4/3} 3}.$$

Так как $\frac{4}{3} > 1$, то функция $y = \left(\frac{4}{3}\right)^{x}$ возрастает и последнее неравенство равносильно неравенству $x \le \log_{4/3} 3$.

Ответ: $\left(-\infty; \log_{4/3} 3\right]$.

Задача 16. Решите неравенство $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1$.

Решение. Перепишем неравенство в следующем виде

$$\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > \left(4x^2 + 2x + 1\right)^{0}.$$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2 + 2x + 1 > 1,\\ x^2 - x > 0;\end{cases}\\ \begin{cases}0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1,\\ x^2 - x < 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x < -\frac{1}{2},\ x > 1;\\ \text{действительных решений нет}\end{array}\right. \Rightarrow x < -\frac{1}{2},\ x > 1.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. *Решите уравнения:*

1. $2^{x+3} - 5\cdot 2^{x} = 3\cdot 2^{-1}$;
2. $4^{x} + 4^{x-1} = 5$;
3. $3^{1+2x} + 3^{2x+3} = 10$;
4. $36^{x} - 204\cdot 6^{x-1} - 72 = 0$;
5. $2\cdot 4^{x+1} - 2^{x+1} - 1 = 0$;
6. $2\cdot 3^{-2x+2} = 3^{-x+1} + 1$;

7. $3\cdot 2^{2x}+6^{x}-2\cdot 3^{2x}=0$;

8. $7^{2x+1}+4\cdot 21^{x}-3^{2x+1}=0$;

9. $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$;

10. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x}-\left(\frac{8}{27}\right)^{x-2}=0$;

11. $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$;

12. $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}=493$;

13. $4\cdot 3^{4x}-2^{4x-1}-3^{4x+1}=2^{4x}$;

14. $9^{\frac{2+x}{2x}}+15^{\frac{1}{x}}=10\cdot 5^{\frac{2}{x}}$;

15. $2^{\sin^2 x}+5\cdot 2^{\cos^2 x}=7$;

16. $\dfrac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}+1}}=1{,}5$;

17. $6\cdot 9^{\frac{1}{x}}-13\cdot 6^{\frac{1}{x}}+6\cdot 4^{\frac{1}{x}}=0$;

18. $25^{|1-2x|}=5^{4-6x}$;

19. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$;

20. $(4+\sqrt{15})^{x}+(4-\sqrt{15})^{x}=62$.

Задание 2. *Решите неравенства:*

1. $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1,5}$;

2. $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{32}\right)^{2x}$;

3. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}} \geq \frac{5}{2}$;

4. $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{x}{4-x}} > 49$;

5. $2^{x+3} + 3\cdot 5^x < 3\cdot 2^x + 5^{x+1}$;

6. $7^{x+2} - 8^{x+2} < 6\cdot 7^{x+1} - 7\cdot 8^{x+1}$;

7. $2^{\sqrt{x+1}} - 1 < 3\cdot 2^{2-\sqrt{x+1}}$;

8. $5^{\sqrt{x-2}} > 5^{1-\sqrt{x-2}} + 4$;

9. $2\cdot 3^{\sqrt{x}} - 5 > 3^{1-\sqrt{x}}$;

10. $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$;

11. $25^{-x} + 5^{1-x} \geq 50$;

12. $4^{\sqrt{x+1}} \leq 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$;

13. $3\cdot 3^{\frac{2}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+1} > 18$;

14. $(x^2 - 6x + 8)^{x-3} < 1$.

Ответы. 1.1. -1; **1.2.** 1; **1.3.** $-\frac{1}{2}$; **1.4.** 2; **1.5.** -1; **1.6.** 2; **1.7.** 1; **1.8.** -1; **1.9.** -1; **1.10.** -1; **1.11.** $-3;\,2$; **1.12.** 2; **1.13.** $\frac{1}{2}$; **1.14.** -1; **1.15.** $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$; **1.16.** $-1;\,8$; **1.17.** ± 1; **1.18.** $\frac{3}{5}$; **1.19.** $\frac{3}{2}$; **1.20.** ± 2; **2.1.** $(-1;3)$; **2.2.** $\left(\frac{1}{3};3\right)$; **2.3.** $(-1;0]$; **2.4.** $(4;8)$; **2.5.** $(1;+\infty)$;
2.6. $(-1;+\infty)$; **2.7.** $[-1;3)$; **2.8.** $(3;+\infty)$; **2.9.** $(1;+\infty)$;
2.10. $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; **2.11.** $(-\infty;-1]$; **2.12.** $[-1;35]$; **2.13.** $(0;\log_2 3)$;
2.14. $\left(-\infty;3-\sqrt{2}\right)\cup\left(4;3+\sqrt{2}\right)$.