Тема 4

Рациональные уравнения и неравенства

1. ***Линейные уравнения и неравенства***

Уравнение вида $ax=b$, где a, b – произвольные действительные числа, называется линейным. При $a\neq 0$ это уравнение имеет единственное решение $x=\frac{b}{a}$. При $a=0$, $b\neq 0$ уравнение не имеет корней, при $a=b=0$ x – любое действительное число.

Задача 1. Решите уравнение:

$$\frac{8x+1}{3}=\frac{5x-1}{7}.$$

Решение. Умножая обе части уравнения на 21, получим

$$24x+7=15x-3\Rightarrow 9x=-10\Rightarrow x=-\frac{10}{9}.$$

Ответ: $x=-\frac{10}{9}$.

Неравенство вида $ax\vee b$, где $\vee$ – один из знаков $>,<,\geq,\leq$, a, b – произвольные действительные числа, называется линейным. При $a\neq 0$ решение находят делением обеих частей неравенства на a, при этом знак неравенства остаётся тем же при $a>0$ и меняется на противоположный при $a<0$. При $a=0$ неравенство либо не имеет решений, либо ему удовлетворяет любое действительное число.

Задача 2. Решите неравенство:

$$\frac{x+3}{6}+\frac{x-7}{3}<\frac{x+11}{2}.$$

Решение. Умножая обе части неравенства на 6, получим

$$x+3+2x-14<3x+33\Rightarrow x+2x-3x<-3+14+33\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot x<44\Rightarrow x\in\mathbf{R}.$$

Ответ: $x\in\mathbf{R}$.

2. ***Квадратные уравнения***

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a,b,c – произвольные действительные числа, $a \neq 0$, называется квадратным уравнением.

При $D=b^2-4ac \geq 0$ квадратное уравнение имеет корни вида $x=\dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если $b=2b_1$ – чётное, то удобнее корни вычислять по формуле $x=\dfrac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2-ac}}{a}$.

Задача 3. Решите уравнение $5x^2-12x-32=0$.

Решение. Коэффициент при x – чётное число, поэтому воспользуемся второй формулой. Имеем $x_{1,2}=\dfrac{6 \pm \sqrt{36+160}}{5}=\dfrac{6 \pm 14}{5}$. Тогда $x_1=\dfrac{6-14}{5}=-\dfrac{8}{5}$, $x_2=\dfrac{6+14}{5}=4$.

Ответ: $x_1=-1{,}6;\ x_2=4$.

Задача 4. Решите уравнение относительно x:

$$(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0.$$

Решение. Выполним замену переменного $x^2-5x=t$, получим

$$t^2+10t+24=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-6, \\ t_2=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x=-6, \\ x^2-5x=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6=0, \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4.$$

Ответ: $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$.

Задача 5. Решите уравнение относительно x:

$$\frac{x}{m(x+1)}-\frac{2}{x+2}=\frac{3-m^2}{m(x+1)(x+2)}.$$

Решение. ОДЗ: $m \neq 0, x \neq -1, x \neq -2$.

Умножим обе части уравнения на $m(x+1)(x+2)$, получим $x(x+2)-2m(x+1)=3-m^2$, или $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3=0$. Отсюда

$$x=m-1 \pm \sqrt{(m-1)^2-\left(m^2-2m-3\right)}=m-1 \pm 2;\ x_1=m-3,\ x_2=m+1.$$

Выясним, при каких значениях m среди полученных корней будут посторонние.

$x_1 = m-3 = -1$ при $m = 2,$ при этом $x_2 = m+1 = 3;$
$x_1 = m-3 = -2$ при $m = 1,$ при этом $x_2 = m+1 = 2;$
$x_2 = m+1 = -1$ при $m = -2,$ при этом $x_1 = m-3 = -5;$
$x_2 = m+1 = -2$ при $m = -3,$ при этом $x_1 = m-3 = -6.$

Ответ: при $m \neq 0, m \neq 1, m \neq \pm 2, m \neq -3$ $x_1 = m-3, x_2 = m+1$; при $m = 1$ $x = 2$; при $m = 2$ $x = 3$; при $m = -2$ $x = -5$; при $m = -3$ $x = -6$; при $m = 0$ уравнение не имеет смысла.

3. *Квадратные неравенства*

Неравенство вида $ax^2 + bx + c \vee 0,$ где a, b, c – произвольные действительные числа, $a \neq 0$, $\vee$ – один из знаков $>, <, \geq, \leq,$ называется квадратным.

При решении квадратных неравенств следует пользоваться свойствами квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Дискриминант $D = b^2 - 4ac$ показывает, *пересекает ли парабола ось абсцисс*. График квадратичной функции в зависимости от значений старшего коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ имеет один из следующих шести видов:

а) при $a > 0$, $D < 0$ парабола лежит выше оси Ox (следовательно, не имеет общих точек с осью Ox) (см. рис. 1, с. 18);

б) при $a > 0$, $D = 0$ парабола касается сверху оси Ox в точке $x_0 = x_1 = x_2$ (см. рис. 2, с. 18);

в) при $a > 0, D > 0$ парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2 (см. рис. 3, с. 18);

г) при $a < 0$, $D < 0$ парабола лежит ниже оси Ox (следовательно, не имеет общих точек с осью Ox) (см. рис. 4, с. 18);

д) при $a < 0$, $D = 0$ парабола касается снизу оси Ox в точке $x_0 = x_1 = x_2$ (см. рис. 5, с. 18);

е) при $a < 0, D > 0$ парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2 (см. рис. 6, с. 18).

Исходя из этого, легко найти решения неравенства: достаточно изобразить на числовой прямой корни квадратного трёхчлена (если они есть), а затем, схематично, график функции. Из рисунка будет видно, какие значения x должны быть выбраны в качестве решения неравенства. Если квадратный трёхчлен не имеет корней, то, в зависимости от знака неравенства и знака старшего коэффициента, неравенство либо не имеет решений, либо ему удовлетворяет любое действительное число.

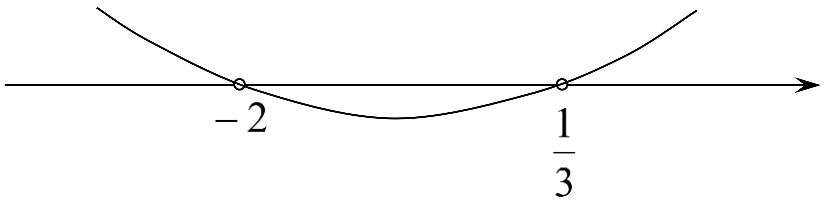
Задача 6. Решите неравенства:

$$\text{а)}\, 3x^2+5x-2>0;\ \text{б)}\ -4x^2+3x+1\geq 0.$$

Решение. а) Найдём корни квадратного трёхчлена $3x^2+5x-2$:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6};x_1=-2,x_2=\frac{1}{3}.$$

Поскольку старший коэффициент положителен, имеем рисунок

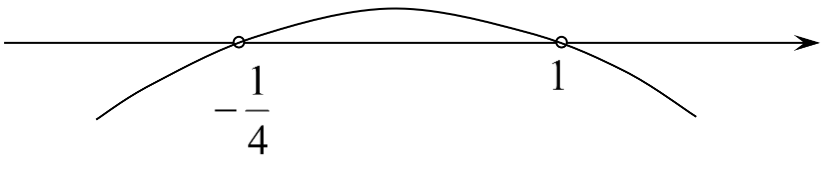


Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right).$

б) Найдём корни квадратного трёхчлена $-4x^2+3x+1$:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-8}=\frac{-3\pm 5}{-8};\quad x_1=-\frac{1}{4},\ x_2=1.$$

Поскольку старший коэффициент отрицателен, имеем рисунок



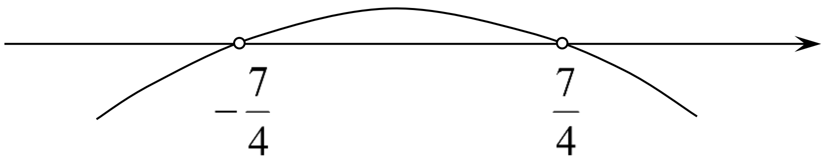
Ответ: $x\in\left[-\frac{1}{4};1\right].$

Задача 7. При каких значениях a квадратный трёхчлен $ax^2-7x+4a$ принимает отрицательные значения для любых действительных x?

Решение. Чтобы квадратный трёхчлен был отрицателен при любых значениях переменной, график функции должен располагаться ниже оси абсцисс, а это означает, что старший коэффициент и дискриминант отрицательны. Следовательно, имеем систему

$$\begin{cases} a < 0, \\ 49 - 16a^2 < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ (7 - 4a)(7 + 4a) < 0. \end{cases}$$

Для второго неравенства имеем рисунок



Учитывая первое неравенство, получаем

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{7}{4} \right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. *Решите уравнения*:

1. $3x - 8 = 5 - 7x$;
2. $\frac{8x+1}{3} = \frac{5x-1}{7}$;
3. $16x^2 - 96x + 135 = 0$;
4. $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = -2{,}5$;
5. $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55$;
6. $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$.

Задание 2. *Решите неравенства*:

1. $-x^2 - 6x + 7 > 0$;
2. $2x^2 - 3x + 1 > 0$;
3. $x^2 - x - 6 < 0$
4. $\frac{1}{x} \le 1$;
5. $\frac{x+8}{x+2} > 2$;
6. $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

Ответы

1.1. $1{,}3$; **1.2.** $-\frac{10}{41}$; **1.3.** $\frac{9}{4}; \frac{15}{4}$; **1.4.** $-\frac{10}{41}$; **1.5.** -1; **1.6.** $-4;\ 2$; **1.7.** $1;\ 3$; **2.1.** $(-1;7)$; **2.2.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$; **2.3.** $(-2;3)$; **2.4.** $(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$; **2.5.** $(-2;4)$; **2.6.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.