Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения.

Механическим движением – это изменение положения данного тела в пространстве (или его частей) относительно других тел, происходящее с течением времени. Любое механическое движение является относительным. Для описания механического движения необходимо указать *тело отсчёта*, относительно которого наблюдается движение других тел.

Материальная точка.

Материальная точка — простейшая модель тела, используемая для описания движения в тех случаях, когда размерами и формой тела можно пренебречь. Эта модель применима, когда
1) размеры тела малы по сравнению с характерными размерами области движения тела,
2) твердое тело совершает поступательное движение.

Положение материальной точки в пространстве определяется положением изображающей ее геометрической точки.

Системой отсчета называют тело отсчета, связанную с ним систему координат и прибор для измерения времени (часы). Положение материальной точки в пространстве определяется тремя координатами *x, y, z* (рис. 1).

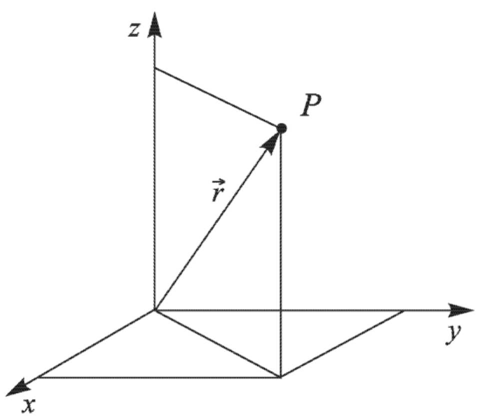


Рисунок 1. Положение материальной точки P в пространстве

Оно может быть задано также радиус-вектором $\vec{r}$, соединяющим начало координат с материальной точкой, причем $\vec{r} = \{x, y, z\}$.

Единица для измерения длины, установленная в Международной системе единиц (СИ), называется метром (м), а единицей измерения времени – секунда (с).

Траектория. При движении материальной точки конец радиус-вектора описывает в пространстве некоторую непрерывную линию, называемую траекторией точки.

Траектория – это линия по которой движется тело (материальная точка).

Уравнение, описывающее зависимость радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ движущейся точки от времени называется векторным кинематическим уравнением движения точки. Оно эквивалентно трем скалярным уравнениям движения: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Траектории одной и той же точки в разных системах отсчета имеют различную форму.

Перемещение материальной точки из положения 1 в положение 2 — это вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, проведенный из начального положения точки в конечное (рис. 2). Проекции вектора перемещения на координатные оси могут быть выражены через разности координат его конца и начала:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta y = y_2 - y_1, \qquad \Delta z = z_2 - z_1$$

Эти величины часто называют перемещениями точки вдоль соответствующих координатных осей.

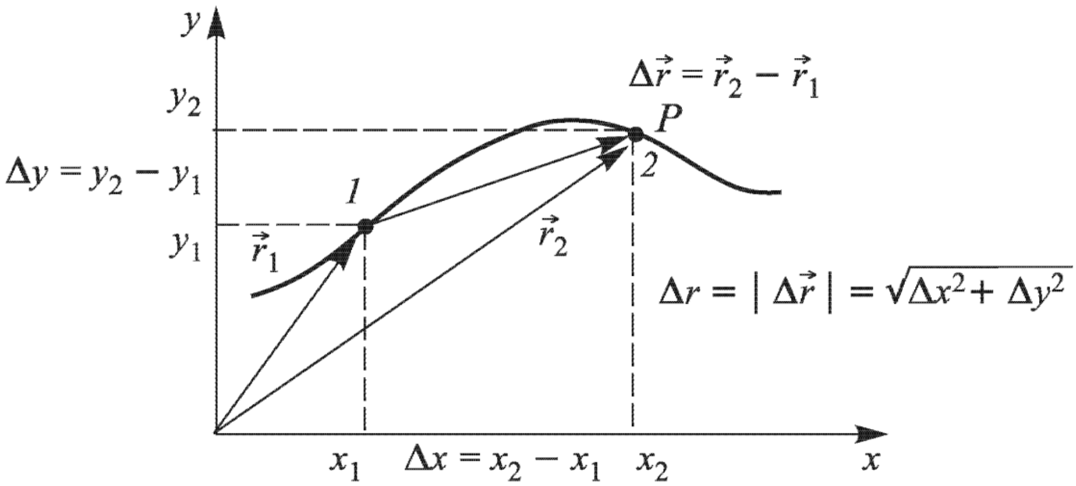


Рисунок 2. Перемещение материальной точки P в пространстве

Путь точки S равен сумме расстояний, пройденных ею вдоль траектории (длина траектории), и всегда является неотрицательной величиной. Пути, пройденные точкой за последовательные промежутки времени, складываются арифметически. Модуль перемещения $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ точки в общем случае не равен пути, пройденному точкой за данный промежуток времени. Путь и перемещение совпадают только при движении точки по прямой в одном направлении.

Скорость. *Средняя скорость* точки в данной системе отсчета на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ есть вектор $\overrightarrow{\mathrm{V}_{\text{ср}}}$, равный отношению вектора перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ к величине интервала времени Δt (рис. 3):

$$\overrightarrow{\mathrm{V}_{\text{ср}}} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Направление средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}$. Средняя скорость характеризует движение точки в течение всего промежутка времени Δt, для которого она определена.

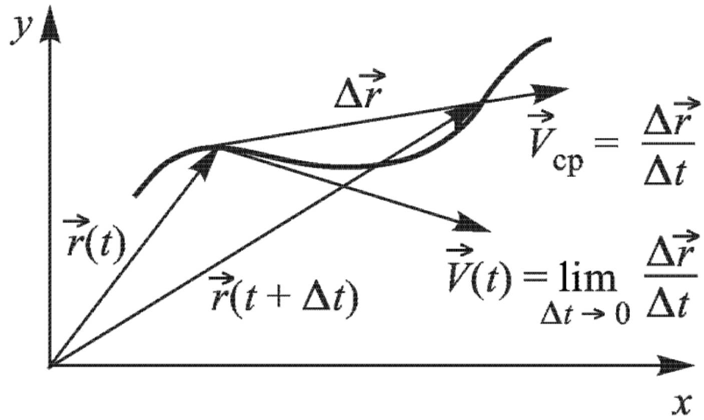


Рисунок 3. Средняя и мгновенная скорость точки

На практике часто используют понятие *средней путевой скорости*, которое определяют как отношение пути, пройденного точкой, ко времени его прохождения.

$$V_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{весь}}}{t_{\text{всё}}}$$

Важно иметь в виду, что величина (модуль) средней скорости в общем случае не совпадает со средней путевой скоростью. Они различны, например, при возвратно-поступательном движении по прямой, при криволинейном движении и т.п.

Мгновенной скоростью (или просто скоростью) $\vec{V}(t)$ точки в данной системе отсчета в момент времени t называется предел средней скорости при стремлении интервала времени Δt к нулю:

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Компонентами вектора скорости являются производные по времени от компонент радиус-вектора точки:

$$\vec{V}(t) = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}$$

(Точки сверху означают производную по времени).

Вектор скорости направлен по **касательной к траектории** точки.

Сложение скоростей. Важной задачей кинематики является установление связи между характеристиками движения точки *относительно разных систем отсчета*. Пусть одна система отсчета, которую мы будем называть подвижной, движется поступательно со скоростью $\overrightarrow{V_0}$ относительно другой системы, которую будем называть неподвижной. Пусть скорость точки относительно подвижной системы отсчета равна $\overrightarrow{V'}$. Тогда скорость $\vec{V}$ этой же точки относительно неподвижной системы находится из соотношения, называемого законом сложения скоростей:

$$\vec{V} = \overrightarrow{V'} + \overrightarrow{V_0}$$

Если необходимо найти скорость 2-го тела относительно 1-го тела $\overrightarrow{V_{21}}$ через их скорости $\overrightarrow{V_2}$ и $\overrightarrow{V_1}$, то:

$$\overrightarrow{V_{21}} = \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}$$

Ускорение. Среднее ускорение точки в данной системе отсчета на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ есть вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора приращения скорости $\Delta\vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)$ на этом интервале к величине интервала времени Δt:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

Мгновенным ускорением (или просто *ускорением*) точки $\vec{a}(t)$ в момент времени t в данной системе отсчета называется предел среднего ускорения при стремлении интервала времени Δt к нулю:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$$

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. По форме траектории движения делятся на прямолинейные и криволинейные. В первом случае траекторией движения точки в данной системе отсчета является прямая линия, во втором — некоторая кривая. Для описания прямолинейного движения удобно совместить координатную ось (например, ось *OX*) с направлением, вдоль которого происходит движение.

Равномернымое движение – это движение с постоянной по модулю скоростью. При равномерном прямолинейном движении точки мгновенная скорость не зависит от времени и в каждой точке траектории направлена вдоль траектории. Средняя скорость за любой промежуток времени равна мгновенной скорости. Кинематическое уравнение движения принимает вид:

$$x(t) = x_0 + V_{x_0} t$$

где x_0 — начальная координата точки, V_{x_0} — проекция скорости точки на координатную ось *OX*.

Равнопеременное прямолинейное движение — это движение точки по прямой с постоянным по величине и по направлению ускорением. При этом среднее ускорение равно мгновенному ускорению. Если направление ускорения $\vec{a}$ совпадает с направлением скорости точки, то движение называется *равноускоренным*, в противоположном случае — *равнозамедленным*.

При равнопеременном прямолинейном движении зависимость скорости и координат точки от времени выражается следующими кинематическими уравнениями:

$$V_x(t) = V_{x_0} + a_x t, \qquad x(t) = x_0 + V_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Надо помнить, что величины, входящие в эти уравнения, являются *алгебраическими*, т.е. с «+», если направление вектора скорости или ускорения совпадают с направлением выбранной оси, и «-», если не совпадают.

Зависимости скорости, координат и пути от времени. При решении задач и анализе результатов удобно представлять зависимости координаты и скорости тела от времени графически. Примеры таких представлений для прямолинейного равномерного и равнопеременного движений приведены на рис. 4 и 5 соответственно.

При построении графиков необходимо учитывать, что тангенс угла наклона касательной к кривой $x = x(t)$ в какой-либо момент времени пропорционален скорости точки в этот момент времени, а тангенс угла наклона касательной к кривой $V = V(t)$ пропорционален ускорению точки в данный момент. По графику зависимости $a = a(t)$ можно найти изменение скорости за промежуток времени от t_1 до t_2: оно равно площади под кривой $a = a(t)$ в пределах от t_1 до t_2. Аналогично, по графику зависимости $V = V(t)$ можно найти изменение координаты точки за время $(t_2 - t_1)$.

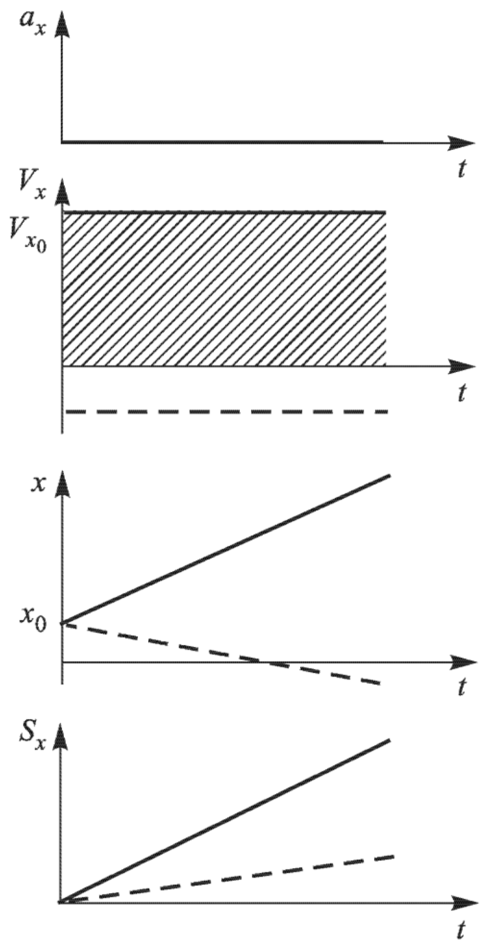


Рисунок 4. Равномерное движение

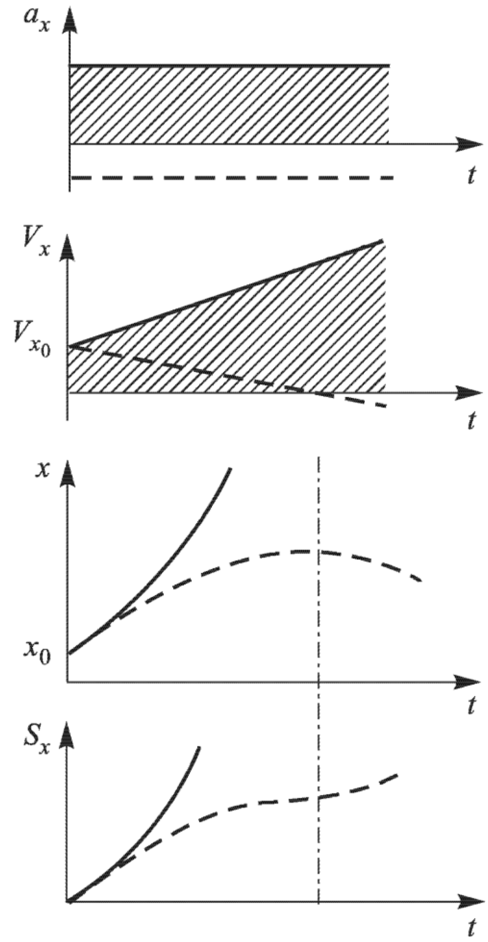


Рисунок 5. Равнопеременное движение

Пример 1

Зависимость координаты от времени для некоторого тела описывается уравнением $x = 8t - t^2$, где все величины выражены в СИ. В какой момент времени скорость тела равна нулю?

Решение:

Зависимость скорости от времени найдем как производную координаты по времени.

$$V_x = \left(x(t)\right)_t' = (8t - t^2)_t' = 8 - 2t$$

И найдём момент времени t, когда скорость $V_x = 0$

$$8 - 2t = 0 \ \Rightarrow t = 4 \text{ с}$$

Ответ: $t = 4$ с.

Пример 2

Два автомобиля движутся по прямому шоссе: первый – со скоростью $\vec{V}$, второй – со скоростью $-3\vec{V}$. Найти модуль скорости второго автомобиля относительно первого.

Решение:

Относительную скорость найдём по формуле:

$$\overrightarrow{V_{21}} = \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1} = -3\vec{V} - \vec{V} = -4\vec{V}$$

Следовательно, модуль $V_{21} = 4V$.

Ответ: $V_{21} = 4V$.

Пример 3

Зависимость пути от времени прямолинейно движущегося тела имеет вид: $s(t) = 2t + 3t^2$, где все величины выражены в СИ. Ускорение тела равно

Решение:

По определению ускорение – это вторая производная от координаты (пути):

$$a_x = (V_x)'_t = \left(s(t)\right)''_t = (2t + 3t^2)''_t = (2 + 6t)'_t = 6\ \text{м/с}^2$$

Ответ: $a_x = 6\ \text{м/с}^2$.

Пример 4

Одной из характеристик автомобиля является время t его разгона с места до скорости 100 км/ч. Два автомобиля имеют такие времена разгона, что $t_1 = 2t_2$. Найти ускорение первого автомобиля по отношению к ускорению второго автомобиля.

Решение:

При равноускоренном движении скорость находим по формуле:

$$V = V_0 + at$$

Так как автомобили в начальный момент времени покоились, то их начальная скорость $V_0 = 0$, а конечная скорость $V = 100\ \text{км/ч}$ одинакова, можем записать:

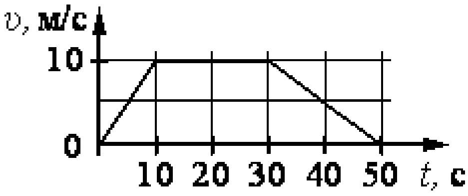
$$V = a_1 t_1 = a_2 t_2 \Rightarrow a_1 2t_2 = a_2 t_2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} a_2$$

Следовательно, ускорение 1-го автомобиля в 2 раза меньше ускорения 2-го автомобиля.

Ответ: $a_1 = \frac{1}{2} a_2$.

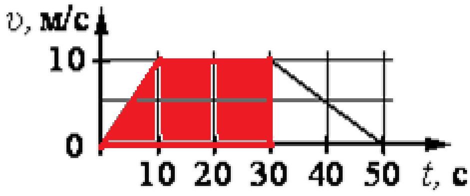
Пример 5

На рисунке представлен график зависимости модуля скорости V автомобиля от времени t. Определите по графику путь, пройденный автомобилем в интервале времени от 0 до 30 с.



Решение:

Из графика зависимости скорости от времени можно найти путь пройденный телом как площадь фигуры заключённой под графиком и осью времени на указанном интервале. То есть искомый путь будет равняться площади тарапеции



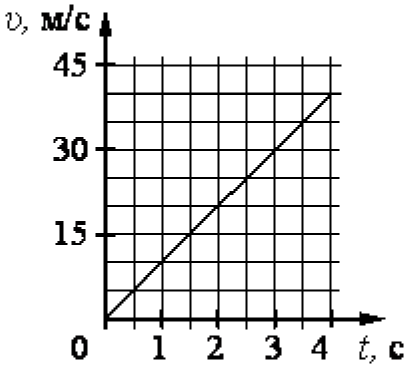
$$S = \frac{1}{2}(30 + 20)10 = 250 \text{ (м)}$$

Ответ: $S = 250$ (м).

Задания для самостоятельного решения

1. Автомобиль, трогаясь с места, движется с ускорением 3 м/с^2. Чему будет равна скорость автомобиля через 4 с?
2. От высокой скалы откололся и стал свободно падать камень. Какую скорость он будет иметь через 3 с от начала падения?
3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. Каков модуль скорости тела через 0,5 с после начала движения? Сопротивление воздуха не учитывать.
4. Лодка должна попасть на противоположный берег реки по кратчайшему пути в системе отсчета, связанной с берегом. Скорость течения реки U, а скорость лодки относительно воды V. Чему должен быть равен модуль скорости лодки относительно берега?
5. Скорость пули при вылете из ствола пистолета равна 250 м/с. Длина ствола 0,1 м. Каково примерно ускорение пули внутри ствола, если считать ее движение равноускоренным?

6. Мотоциклист и велосипедист одновременно начинают равноускоренное движение из состояния покоя. Ускорение мотоциклиста в 3 раза больше, чем у велосипедиста. Во сколько раз больше времени понадобится велосипедисту, чтобы достичь скорости 50 км/ч?
7. Ускорение велосипедиста на одном из спусков трассы равно 1,2 м/с^2. На этом спуске его скорость увеличивается на 18 м/с. Через какое время велосипедист заканчивает свой спуск после его начала?
8. Начальная скорость тележки равна 5 м/с. Тележка движется с ускорением 2 м/с^2, направленным в ту же сторону, что и начальная скорость. Определите скорость тележки через 3 с.
9. Тело начинает двигаться равноускоренно с начальной скоростью 3 м/с и ускорением 5 м/с^2. На сколько увеличится его скорость за 2 с?
10. Тело начинает движение из состояния покоя с постоянным ускорением 3 м/с^2. Какова будет скорость через 3 с?
11. Мимо остановки по прямой улице с постоянной скоростью проезжает грузовик. Через 5 с от остановки вдогонку грузовику отъезжает мотоциклист, движущийся с ускорением 3 м/с^2, и догоняет грузовик на расстоянии 150 м от остановки. Чему равна скорость грузовика?
12. Автомобиль трогается с места и движется с постоянным ускорением 5 м/с^2. Какой путь прошёл автомобиль, если его скорость в конце пути оказалась равной 15 м/с?
13. Мальчик съезжает на санках равноускоренно со снежной горки. Скорость санок в конце спуска 10 м/с. Ускорение равно 1 м/с^2, начальная скорость равна нулю. Чему равна длина горки?
14. На графике приведена зависимость скорости тела от времени при прямолинейном движении. Определите по графику ускорение тела.



Ответы:

1. 12 м/с.
2. 30 м/с.
3. 15 м/с.
4. V^2-U^2
5. 312500 м/$с^2$
6. 3 м/с.
7. 15 с.
8. 11 м/с.
9. 10 м/с.
10. 9 м/с.
11. 10 м/с.
12. 22,5 м.
13. 50 м.
14. 10 м/$с^2$.