Тема 20
Задачи по теории чисел

Часть С содержит задачу, решение которой основано на знании элементарных понятий теории чисел, знакомых каждому школьнику: делимость, теорема о делении с остатком, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, простые числа и их свойства.

Задача 1. Имеется семь стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй – на треть, третий – на четверть, четвёртый – на одну пятую, пятый – на одну восьмую, шестой – на одну девятую, и седьмой – на одну десятую. Разрешается переливать всю воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой, пока он не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться заполненным

а) на одну двенадцатую;

б) на одну шестую?

***Решение*:** Ограничимся ответом на первый вопрос. Легко заметить, что если перелить воду из второго стакана в первый, а затем дополнить его доверху водой из третьего стакана, то в третьем останется

$$\frac{1}{4}-\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{4}-\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

Мы видим, что ответ на первый вопрос положительный, и обоснование не представляет большой трудности, достаточно уметь выполнять действия с обыкновенными дробями.

Задача 2 (Тренировочный ЕГЭ–2014). В ряд выписаны квадраты всех натуральных чисел, начиная с 1. Каждое число заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите 15–е число получившейся последовательности;

б) Найдите сумму первых 550 чисел получившейся последовательности;

в) Сумма n идущих подряд чисел получившейся последовательности равна 3074. Чему может равняться n?

***Решение*:** Для ответа на первый вопрос достаточно понять условие задачи и выписать первые 15 членов последовательности, т.е.

$$1^2,\ 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 14^2, 15^2;$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81, 100, 121,\ 144,\ 169, 196,\ 225;$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 7,\ 7,\ 9,\ 13,\ 10,\ 9,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 7,\ 9;$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 7,\ 7,\ 9,\ 4,\ 1,\ 9,\ 1,\ 4,\ 9,\ 7,\ 7,\ 9.$$

Мы видим, что 15–е число – это число 9.

Определение. Натуральное число, имеющее ровно два различных натуральных делителя, называется простым. Например, каждое из чисел 2, 3, 5, 7 имеет только 2 делителя: единицу и само себя. Число, имеющее более

двух делителей, называется составным. Например, число 4 имеет 3 делителя: 1, 2 и 4. При этом число 1 не является ни простым, но составным.
Рассмотрим задачи, решение которых основано на понятии простого числа.

Задача 3. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трехчлена и его значение в точке $x=11$ являются простыми числами. Найдите корни трехчлена.
***Решение*:** Пусть x_1, x_2 – корни трёхчлена. Тогда $f(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, отсюда $f(11)=(11-x_1)\cdot(11-x_2)$. Поскольку $f(11)$ – простое число, то $11-x_1=1 \Rightarrow x_1=10,\ 11-x_2$ – простое число
или $11-x_1=-1 \Rightarrow x_1=12,\ x_2-11$ – простое число.
Так как x_2 – простое число, числа x_2-11 и x_2 имеют различную чётность, а 2 – единственное чётное простое число, то $x_2=13, x_2-11=2$.
***Ответ*:** 12 и 13.

Задача 4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из отрезка натурального ряда от 1 до 2009, так чтобы разность любых двух из них *не была* простой ?
***Решение*:**
Искомое множество не может содержать двух чисел, разность между которыми равна 2 или 3. Это означает, что если элементы искомого множества расположить в порядке возрастания, то разность между любыми двумя соседними должна быть не меньше 4.
Таким образом, искомое множество должно иметь вид

$$A=\{k,k+m_1,k+m_2,...,k+m_n\},\ \ k\ge 1,\ k+m_n\le 2009.$$

Среди множеств такого вида наибольшее число элементов, именно 503, содержит множество

$$A=\{4k+1:k=0,1,2,...,502\}=\{1,5,9,...,2009\}.$$

Следующий пример демонстрирует применение теоремы о делении с остатком, в частности, тот факт, что квадрат натурального числа при делении на 3 может давать остаток либо 0, либо 1, но не 2. (Как известно, при делении целого числа на натуральное m возможные различные остатки $0,1,...,m-1$).
Задача 5. Решите в целых числах уравнение $3^n+8=m^2$.
***Решение*:** Очевидно, что уравнение не имеет решений, для которых $n\le -1$.
Если $n\ge 1$, то $|m|>3$, но тогда при делении на 3 число в левой части уравнения дает в остатке 2, а число в правой части дает в остатке 0 или 1.
Значит, $n=0,\ m=\pm 1$.
***Ответ*:** $n=0,\ m=\pm 1$.

Задача 6 (ЕГЭ-2012). Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино было не более $\frac{3}{7}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся группы без дополнительного условия пунктов а и б?

***Решение*:** а) Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 7 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 3 мальчиков, поскольку если бы их было 4 или больше, доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{4}{4+9}=\frac{4}{13}$, что больше $\frac{3}{11}$. Аналогично, кино посетило не более 7 мальчиков, поскольку $\frac{8}{8+9}=\frac{8}{17}>\frac{3}{7}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил бы ни кино, ни театр, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе – 10.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало бы два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой – только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик сходил или только в кино, или только в театр.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \le \frac{3}{11}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \le \frac{3}{7}$, значит, $\frac{m_1}{d} \le \frac{3}{8}$, $\frac{m_2}{d} \le \frac{3}{4}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \le \frac{9}{8}$, поэтому доля девочек в группе $\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \ge \frac{1}{\frac{9}{8}+1} = \frac{8}{17}$.

Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 8 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна .

***Ответ*:** а) да; б) 10; в) $\frac{8}{17}$.

Задача 7 (ЕГЭ-2013). Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, встречается несколько раз, то на доске остаётся одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, при которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

Решение. а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, написанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе – это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе – это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть 22–1=21. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 10 – наименьшее число в наборе – является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе – это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{59}{10}$, то есть 5. Кроме того, числа 12 и 13 меньше, чем сумма двух чисел 10, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна 59–10–12–13=24. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 10, оставшиеся задуманные числа –

это 12 и 12 или 24. Для задуманных чисел 10, 12, 12, 12, 13 и 10, 12, 13, 24 на доске будет записан набор, заданный в условии.

Ответ: а) 1,1,1,1,1,1; б) нет; в) 10,12,12,12,13 или 10,12,13,24.