Тема 19

Неравенства на ЕГЭ

Решение показательных и логарифмических неравенств основано на свойствах показательной и логарифмической функций (см. темы 10 и 11). Рассмотрим примеры.

Задача 1. Решите неравенство $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} > 0, \\ \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > 0, \\ \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > 0, \\ \log_3 \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} > 0, \\ \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > \log_{32} 1, \\ \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > \log_{0,2} 1, \\ \log_3 \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > \log_3 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} > 0, \\ \dfrac{x-1}{x+5} > 1, \\ \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} < 1, \\ \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} > 1, \\ \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} < \log_{32} 32, \\ \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > \log_{0,2} 0{,}2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} > 1, \\ \dfrac{x-1}{x+5} < 32, \\ \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} < 0{,}2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} > 1, \\ \dfrac{x-1}{x+5} < 32, \\ \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} < \log_{32} 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} > 1, \\ \dfrac{x-1}{x+5} < 32, \\ \dfrac{x-1}{x+5} < 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} - 1 > 0, \\ \dfrac{x-1}{x+5} - 2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1-x-5}{x+5} > 0, \\ \dfrac{x-1-2x-10}{x+5} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-6}{x+5} > 0, \\ \dfrac{-x-11}{x+5} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 < 0; \\ -x-11 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

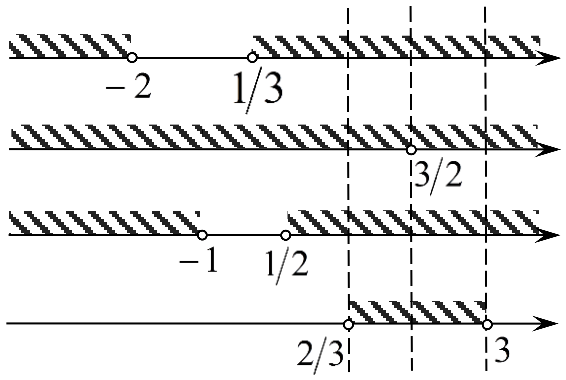
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -5, \\ x < -11; \end{cases} \Leftrightarrow x < -11.$$ **Ответ:** $x \in (-\infty; -11)$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\geq\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right).$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x+2}>0,\\ \dfrac{3x-1}{x+2}\neq1,\\ 2x^2+x-1>0,\\ 11x-6-3x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x+2}>0,\\ x\neq\dfrac{3}{2},\\ 2(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>0,\\ 3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)(x-3)<0.\end{cases}$

Для решения этой системы удобно использовать иллюстрацию:



Окончательно получаем ОДЗ: $x\in\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};3\right)$.

При решении исходного неравенства мы воспользуемся свойством монотонности логарифмической функции, но, поскольку в основании логарифма есть переменная, мы не можем сказать, является ли эта функция возрастающей или убывающей.

При записи ограничений мы видели, что значение $x=3/2$ даёт единицу в основании логарифма, следовательно, необходимо решать задачу в двух случаях: при $x<\dfrac{3}{2}$ и при $x>\dfrac{3}{2}$.

1. Пусть $x\in\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right)$. Тогда $\dfrac{3x-1}{x+2}<1$ и исходное неравенство равносильно следующему

$$2x^2+x-1\leq11x-6-3x^2\ \Leftrightarrow\ 5x^2-10x+5\leq0\ \Leftrightarrow\ (x-1)^2\leq0,$$

что справедливо лишь при $x=1\in\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right)$.

2. Пусть $x\in\left(\dfrac{3}{2};3\right)$. Тогда $\dfrac{3x-1}{x+2}>1$ и получаем неравенство противоположного знака:

$$2x^2+x-1\ge 11x-6-3x^2 \Leftrightarrow 5x^2-10x+5\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0.$$

Последнее неравенство верно для любого значения x, то есть весь рассматриваемый промежуток попадает в окончательный

Ответ: $x\in\{1\}\cup(1{,}5;3)$.

Задача 3 (ЕГЭ-2011). Решите неравенство

$$7\log_{12}\left(x^2-13x+42\right)\le 8+\log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6}.$$

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-13x+42>0, \\ \dfrac{(x-7)^7}{x-6}>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-6)(x-7)>0, \\ \dfrac{(x-7)^7}{x-6}>0; \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;6)\cup(7;+\infty).$$

Перепишем исходное неравенство, разложив на множители квадратный трёхчлен в первом логарифме и перенеся в правую часть второй логарифм, получим

$$7\log_{12}\left((x-6)(x-7)\right)-\log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6}\le 8 \Rightarrow \log_{12}\frac{(x-6)^7(x-7)^7(x-6)}{(x-7)^7}\le 8.$$

Отсюда $\log_{12}(x-6)^8\le 8 \Rightarrow 8\cdot\log_{12}|x-6|\le 8 \Rightarrow \log_{12}|x-6|\le\log_{12}12$.

Следовательно, $|x-6|\le 12 \Rightarrow -12\le x-6\le 12 \Rightarrow -6\le x\le 18$.

Учитывая ОДЗ получаем

Ответ: $x\in[-6;6)\cup(7;18]\cdot$

Несмотря на простоту и компактность решения, эта задача вызвала определённые трудности у решавших её выпускников, и лишь немногие смогли получить максимальные 3 балла. Типичная ошибка: при вынесении за знак логарифма чётного показателя степени забывали подлогарифмическое выражение взять по модулю.

Задача 4 (Демо-2012). Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x\le 5\cdot 3^{x+1}+16, \\ \log_2\left(x^2+2x-3\right)\ge 1+\log_2\dfrac{x+3}{x-1}. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x^2+2x-3>0, \\ \dfrac{x+3}{x-1}>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty).$

Решим первое неравенство системы.

Полагая $t=3^x$, получим $t^2-15t-16\le 0$. Отсюда $-1\le t\le 16$ или $3^x\le 16 \Rightarrow x\le \log_3 16$. Учитывая ОДЗ, $x\in(-\infty;-3)\cup(1;\log_3 16]$.

Решим второе неравенство, предварительно разложив на множители квадратный трёхчлен в первом логарифме и перенеся влево второй логарифм:

$$\log_2((x+3)(x-1))-\log_2\frac{x+3}{x-1}\ge 1 \Rightarrow \log_2(x-1)^2\ge \log_2 2 \Rightarrow (x-1)^2\ge 2,$$

так как основание логарифма больше единицы.

Перепишем последнее неравенство в виде

$$(x-1)^2-2\ge 0 \Rightarrow (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})\ge 0 \Rightarrow (x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))\ge 0.$$

Отсюда $x\in\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$. Учитывая ОДЗ,
$x\in(-\infty;-3)\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$.

Остаётся сформулировать окончательный ответ. Для этого надо понять, где на числовой прямой располагается число $1+\sqrt{2}$ по отношению к промежутку $(1;\log_3 16)$. Очевидно, что $1+\sqrt{2}>1$. Чтобы сравнить $1+\sqrt{2}$ с $\log_3 16$, заметим, что $1+\sqrt{2}<2{,}5 \Rightarrow 3^{1+\sqrt{2}}<3^{2{,}5}=\sqrt{3^5}$,

$$3^5=243<256=16^2 \Rightarrow \sqrt{3^5}<16 \Rightarrow 3^{1+\sqrt{2}}<3^{\log_3 16} \Rightarrow 1+\sqrt{2}<\log_3 16,$$

то есть $1<1+\sqrt{2}<\log_3 16$. Отсюда получаем окончательный

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup\left[1+\sqrt{2};\log_3 16\right]$.

Задача 5 (ЕГЭ-2012). Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3-4^x}{2-2^x}\ge 1{,}5, \\ \log_{x^2}(2-x)\le 1. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы. Положим $t=2^x$. Тогда

$$\frac{3-t^2}{2-t}\ge 1{,}5 \Leftrightarrow \frac{t^2-1{,}5t}{t-2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{t(t-1{,}5)}{t-2}\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} 0\le t\le 1{,}5 \\ t>2 \end{matrix}\right., \text{то есть } \left[\begin{matrix} 0\le 2^x\le 1{,}5 \\ 2^x>2 \end{matrix}\right..$$

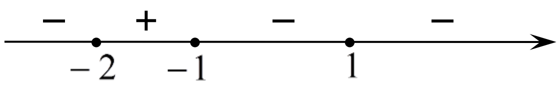
Отсюда получаем решение первого неравенства системы:
$x\le \log_2 1{,}5;\ x>1.$

Решим второе неравенство системы, используя метод рационализации. Для этого перепишем неравенство в виде $\log_{x^2}(2-x)-\log_{x^2}x^2 \le 0$.

Последнее неравенство равносильно рациональному неравенству $\left(x^2-1\right)\left(2-x-x^2\right)\le 0$ в области допустимых значений переменной логарифмического неравенства.

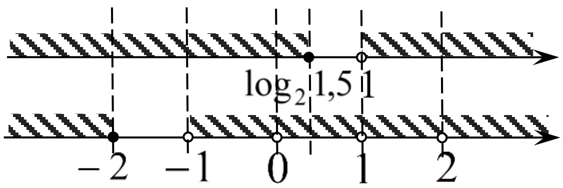
ОДЗ: $\begin{cases} x^2>0, \\ x^2\ne 1, \\ 2-x>0, \end{cases} \Rightarrow\ x<2;\ x\ne 0;\ x\ne \pm 1$

Рациональное неравенство можно преобразовать к виду $-(x-1)^2(x+1)(x+2)\le 0$ и решить методом интервалов.



С учётом ОДЗ решение второго неравенства исходной системы: $x\le -2;\ -1<x<0;\ 0<x<1;\ 1<x<2$.

Решение системы удобно искать с помощью иллюстрации



Ответ: $x\in(-\infty;-2]\cup(-1;0)\cup(0;\log_2 1{,}5]\cup(1;2)$.

Задача 6 (ЕГЭ-2012). Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6, \\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2. \end{cases}$$

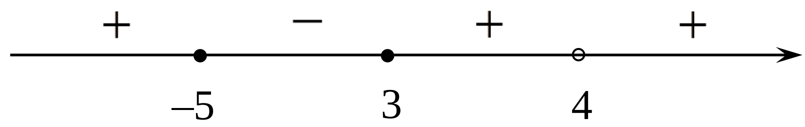
Решение. 1. Решим первое неравенство системы, используя метод рационализации. Перепишем неравенство в виде

$$\log_{4-x}\frac{x+6}{(x-4)^6}\ge \log_{4-x}\frac{1}{(4-x)^6}.$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4-x>0, \\ 4-x\neq 1, \\ x+6>0, \\ (4-x-1)\left(\dfrac{x+6}{(x-4)^6}-\dfrac{1}{(4-x)^6}\right)\geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<4, \\ x\neq 3, \\ x>-6, \\ \dfrac{(x-3)(x+5)}{(x-4)^6}\leq 0. \end{cases}$$

Решая последнее неравенство системы методом интервалов



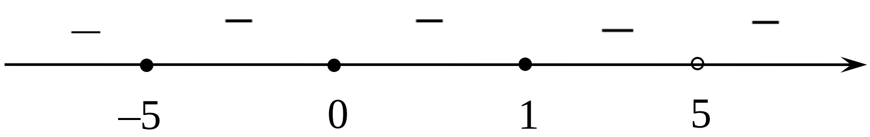
и учитывая остальные условия, получаем, что $-5\leq x<3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+9x^2+\frac{40x^2+2x-10}{x-5}\leq 2;\ \ x^3+9x^2+\frac{40x^2}{x-5}\leq 0;$$

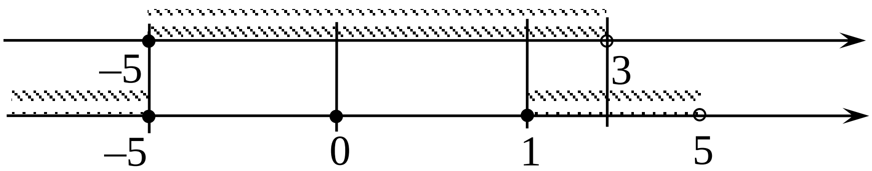
$$\frac{x^4+4x^3-5x^2}{x-5}\leq 0;\ \ \frac{x^2(x-1)(x+5)}{x-5}\leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов,



получим: $x\leq -5;\ x=0;\ 1\leq x<5.$

3. Решение исходной системы удобно завершить, используя иллюстрацию:



Ответ: $-5;\ 0;\ [1;3)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5^{x-1}+12\cdot 5^{2-x}\leq 61, \\ \dfrac{2\log_7(x-1)-1}{\log_{x-1}7}\leq 0. \end{cases}$

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}, \\ \log_2^2 x + 6 \geq 5 \cdot \log_2 x. \end{cases}$

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \geq 2\sqrt[4]{5}, \\ \log_3^2 x + 2 > 3\log_3 x. \end{cases}$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_2(21-x) + \log_{0,5}(x-1) \geq \log_{\sqrt{2}} 3, \\ 0,5^{\sqrt{2x+3}} < 2^{-x}. \end{cases}$$

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x \leq 5 \cdot 3^{x+1} + 16, \\ \log_2\left(x^2 + 2x - 3\right) \geq 1 + \log_2 \dfrac{x+3}{x-1}. \end{cases}$$

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5x} x^2 + \log_{x^2} 5x \leq 2, \\ \log_{x-3}^4\left(x^2 - 17\right) + \log_{x^2-17}^2 (x-3) - \log_{5x} 25 > 79. \end{cases}$$

Ответы

1. $(2; 2+\log_5 12]$; 2. $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 4\right] \cup [8; +\infty)$;

3. $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\sqrt{5}; 3\right) \cup (9; +\infty)$; 4. $(1;3)$;

5. $(-\infty; -3) \cup \left[1+\sqrt{2}; \log_3 16\right]$; 6. $\left[-\log_3 82; -4\right) \cup (3;4)$.