Тема 18

Тригонометрические уравнения на ЕГЭ

Вспомним основные формулы. Все тригонометрические уравнения решаются сведением к одному из четырёх простейших:

1) $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, & \text{если } |\alpha| \le 1, \\ \text{нет решений}, & \text{если } |\alpha| > 1. \end{cases}$

2) $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, & \text{если } |\alpha| \le 1, \\ \text{нет решений}, & \text{если } |\alpha| > 1. \end{cases}$

3) $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

4) $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Метод сведения к простейшему уравнению выбирают, исходя из вида уравнения (см. тема 14. Решение тригонометрических уравнений).

Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 1. Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x+5)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решение. Мы имеем простейшее тригонометрическое уравнение вида 2. Его корни: $\frac{\pi(x+5)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = -5 \pm 1 + 6n.$

Наибольший отрицательный корень $x = -4$ получится при $n = 0$ (верхний знак).

Ответ: – 4.

Задача 2 (ЕГЭ-2012).

а) Решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

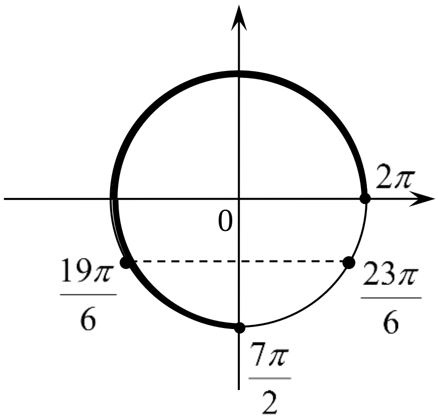
Решение. а) Перепишем уравнение в виде:

$$6 - 6\sin^2 x + 7\sin x - 1 = 0;\ 6\sin^2 x - 7\sin x - 5 = 0;\ (3\sin x - 5)(2\sin x + 1) = 0.$$

Значит, или $\sin x = \frac{5}{3}$ – уравнение не имеет корней,

или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности выберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим число $\frac{19\pi}{6}$.

Можно делать отбор корней с помощью решения неравенств: из иллюстрации видно, что в данный промежуток попадает корень из второго множества, тогда

$$2\pi \le -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z \le \frac{7\pi}{2} \Rightarrow 1 + \frac{5}{6} \le n \le \frac{7}{2} + \frac{5}{6} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow x = \frac{19\pi}{6}.$$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $\frac{19\pi}{6}$.

Задача 3 (ЕГЭ-2012). а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}5 = \cos^2 x$.

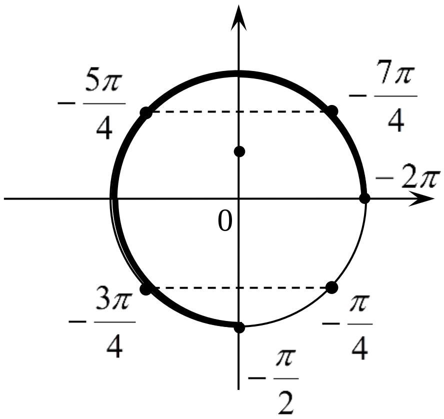
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 0{,}5 = \cos^2 x;\ \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности выберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.



Получим числа $-\frac{7\pi}{4};-\frac{5\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{4};-\frac{5\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}$.

Задача 4 (ЕГЭ-2013). а) Решите уравнение $21^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Решение. а) Перепишем данное уравнение в виде

$$3^{-\sin x}\cdot 7^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x};\ 7^{-\sin x}=7^{\cos x};\ -\sin x=\cos x;\ \operatorname{tg} x=-1.$$

Тогда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$

б) Для отбора корней решим неравенство $-\frac{3\pi}{2}\le -\frac{\pi}{4}+\pi n\le 0$ относительно n: $-\frac{3}{2}\le -\frac{1}{4}+n\le 0;\ -\frac{5}{4}\le n\le \frac{1}{4}$. Целые значения в полученном промежутке – это –1 и 0. Следовательно, $x_1=-\frac{5\pi}{4};\ x_2=-\frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; б) $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

Задача 4. а) Решите уравнение $\frac{2(\cos x+\sin x)+1-\cos 2x}{2(1+\sin x)}=\sqrt{3}+\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Решение. а) Упростим левую часть уравнения, а затем избавимся от знаменателя, умножив обе части на $1+\sin x,\ \sin x\ne -1$:

$$\frac{2(\cos x+\sin x)+2\sin^2 x}{2(1+\sin x)}=\sqrt{3}+\sin x;\ \frac{\cos x+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}=\sqrt{3}+\sin x;$$

$$\cos x+\sin x+\sin^2 x=\sqrt{3}+\sin x+\sqrt{3}\sin x+\sin^2 x;$$

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=-\sqrt{3}.$$

Решим полученное уравнение методом введения вспомогательного аргумента. Разделим обе части на 2, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

или $\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогда

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z\ \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

или $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Первое множество корней не удовлетворяет условию $\sin x\neq -1.$

б) Очевидно, что в промежуток $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ попадает единственный корень из второго множества: $x=-\frac{\pi}{6}$.

Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\frac{2\pi x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi(x+1)}{12}=-\frac{1}{2}$.
3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\frac{\pi(8x+1)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{5\pi x}{9}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. 1) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$.

2) Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

6. 1) Решите уравнение $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin x$.

2) Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

7. 1) Решите уравнение $\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

2) Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$.

8. 1)Решите уравнение $\sin 2x=2\sin x-\cos x+1$.

2)Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

9. Найдите все решения уравнения $\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|=8\cos^2\frac{x}{2}-5$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

10. Решите уравнение $7\sin^2 x+4\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.
Найдите корни, принадлежащие промежутку $\left[{}^{5\pi}\!/_{2};{}^{7\pi}\!/_{2}\right]$.

11. 1) Решите уравнение $4\cos^2 x+8\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+1=0$.

2) Найдите корни, принадлежащие промежутку $\left[3\pi;{}^{9\pi}\!/_{2}\right]$.

Ответы

1. –0,5; 2. 13; 3. -0,25; 4. 0;

5. $\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,k\in Z$ $\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{17\pi}{6}$;

6. 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi k; -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,k\in Z$; 2) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6}$;

7. 1) $\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,k\in Z$; 2) $-2\pi; -\frac{7\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{6}$;

8. 1) $2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi k; -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ n,k\in Z$; 2) $-2\pi; -\frac{5\pi}{6}$;

9. $\pm\arccos\frac{1}{4}$;

10. $-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \mathrm{arctg}\,\frac{3}{7}+\pi k, n,k\in Z;\ \frac{11\pi}{4};\ \mathrm{arctg}\,\frac{3}{7}+3\pi$;

11. $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;\ \frac{25\pi}{6}$.