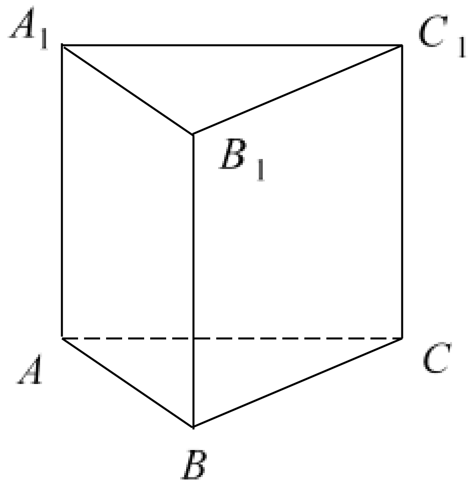
Тема 17
Стереометрия на ЕГЭ

Задачи по стереометрии на ЕГЭ содержатся в первой части (В10 и В13) и во второй части (С2).Здесь представлены задачи с решениями, относящиеся к части В (задачи 1-7) и к части С (задачи 8-12), в том числе задачи С2, предлагавшиеся на экзамене в последние годы. Некоторые задачи решены двумя способами. Любой из способов решения может применяться на экзамене.

Предлагается попробовать решить задачи самостоятельно, а затем проверить правильность решения.

Задача 1.

Боковое ребро правильной треугольной призмы равно $\sqrt{3}$, а площадь поверхности призмы равна $36\sqrt{3}$. Найдите сторону основания призмы.



Решение. Пусть a – искомая сторона основания призмы. Выразим площадь поверхности призмы S через a:

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a\sqrt{3}.$$

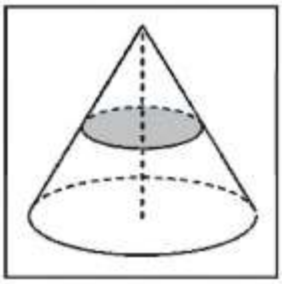
Отсюда $\dfrac{a^2}{2} + 3a = 36$ или $a^2 + 6a - 72 = 0$.

Решая уравнение, получаем

Ответ: $a = 6$.

Задача 2.

Объём конуса равен 144. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Решение. Объём конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r – радиус основания конуса, h – его высота. Радиус основания и высота меньшего конуса в два раза меньше соответственно радиуса основания и высоты большего конуса, поэтому объём меньшего конуса в восемь раз меньше объёма большего конуса.

Следовательно, искомый объём $V_1 = \frac{1}{8}V = 18$.

Ответ: 16.

Задача 3.
Если ребро куба увеличить на 1, то объём куба увеличится на 37. Найдите ребро этого куба.

Решение. Пусть a – ребро куба. Объём куба $V = a^3$. Тогда
$(a+1)^3 = a^3 + 37 \;\Rightarrow\; a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + 37 \;\Rightarrow\; a^2 + a - 12 = 0$.
Следовательно, $a = 3$.

Ответ: 3

Задача 4.

В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы со стороной основания 10 см, налили воду. Высота уровня равна 60 см. Воду перелили в другой сосуд такой же формы, в результате чего высота уровня воды понизилась на 45 см. Найдите длину (в см) стороны основания второго сосуда.

Решение. Объём воды равен объёму призмы $V = S \cdot h$, где S – площадь основания призмы, $h = 60$ – её высота. После переливания высота стала равна 15 см, то есть уменьшилась в четыре раза. Поскольку объём воды не изменился, площадь основания второй призмы должна быть в четыре раза больше площади основания первой призмы, а тогда сторона основания – в два раза больше, то есть её длина равна 20 см.

Ответ: 20

Задача 5.
Концы отрезка KM лежат на окружностях оснований цилиндра. Высота цилиндра равна 24, радиус основания равен 13, а угол между прямой KM и

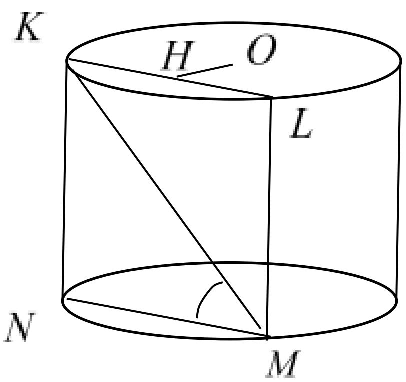
плоскостью основания цилиндра равен 60°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки K и M .

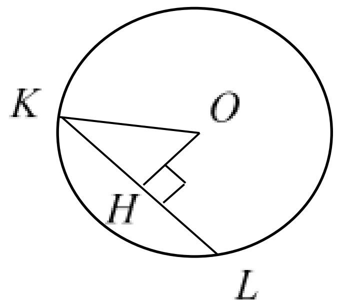
Решение. Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость. Образующая цилиндра KN перпендикулярна плоскости основания, следовательно, данный угол – это $\angle KMN = 60^\circ$. Плоскость KMN параллельна оси цилиндра, а искомое расстояние – длина перпендикуляра OH , опущенного из центра основания на хорду KL .

При этом $KH = HL = \frac{1}{2}KL$.

Из ΔKNM $NM = KN \cdot ctg 60^\circ = 8\sqrt{3} \Rightarrow KH = 4\sqrt{3}$.

Тогда $OH = \sqrt{KO^2 - KH^2} = 11$.

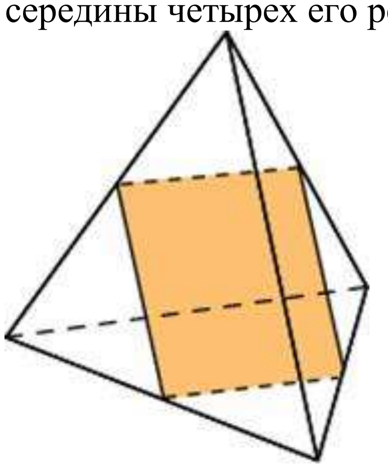




Ответ: 11.

Задача 6.

Рёбра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его рёбер.

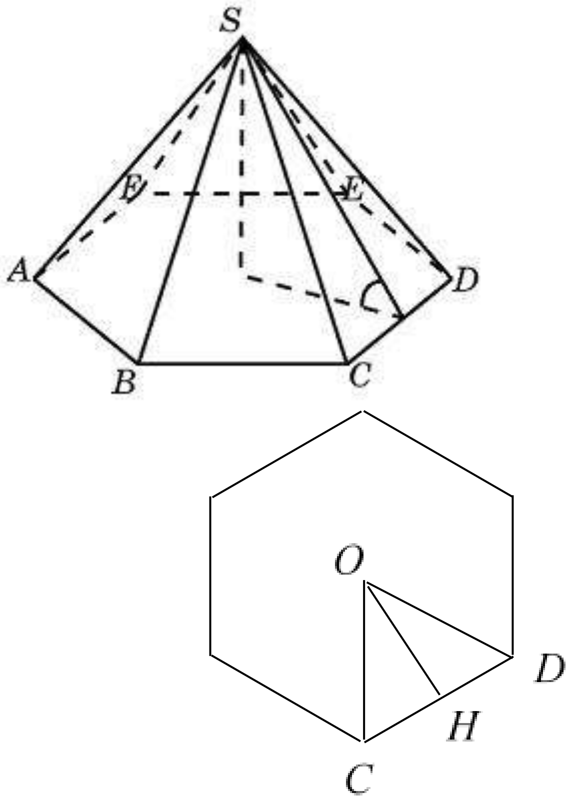


Решение. Данное сечение правильного тетраэдра – квадрат со стороной, равной половине длины ребра тетраэдра. Его площадь равна 0,25.

Ответ: 0,25.

Задача 7.

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объём пирамиды.



Решение. Объём пирамиды $V = \frac{1}{3} S \cdot h$, где S – площадь основания пирамиды (правильного шестиугольника), h – её высота. Из равностороннего

$\Delta OCD \quad OH = OD \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \Rightarrow S = 6 \cdot S_{\Delta OCD} = 24\sqrt{3}$.

Высота пирамиды $SO = OH = 2\sqrt{3}$, следовательно,

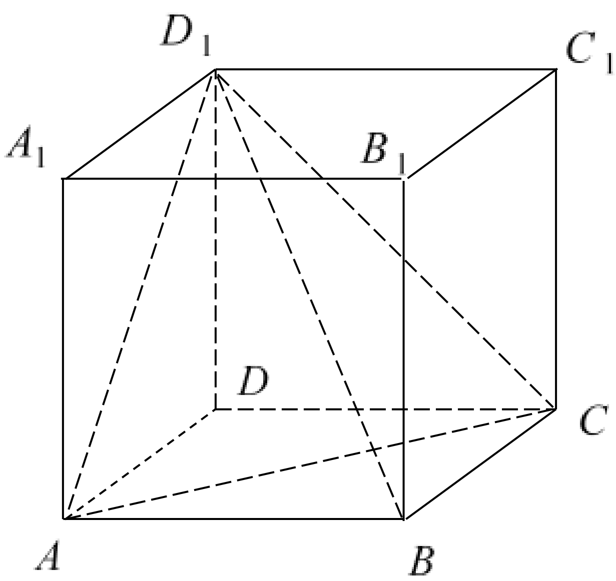
$V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 48$.

Ответ: 48.

Задача 8.

Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

Решение.



Искомое расстояние – это длина перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость ACD_1. Его можно искать как длину высоты треугольной пирамиды с основанием ACD_1 и вершиной B.

Вычислим объём этой же пирамиды, считая основанием треугольник ABC , а вершиной – точку D_1. Тогда $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DD_1=\frac{1}{6}$.

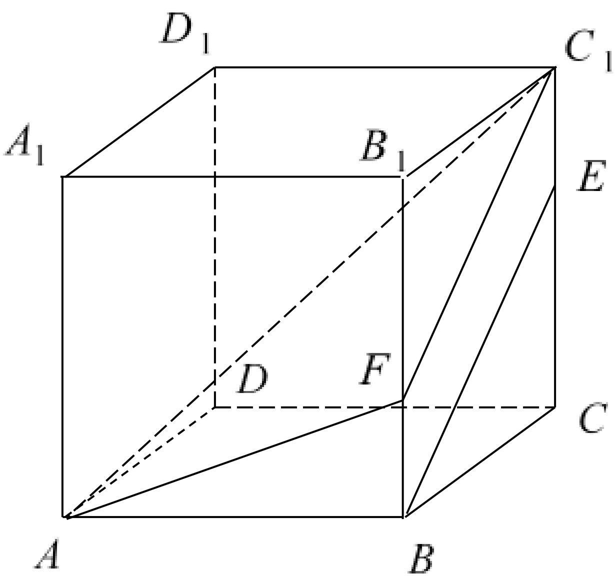
С другой стороны, $V=\frac{1}{3}S_{ACD_1}\cdot h$, где h, – искомое расстояние от точки до плоскости. Получаем $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot AC^2}{4}\cdot h=\frac{h\sqrt{3}}{6}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 9 (ЕГЭ-2012).

На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE:EC_1=2:1$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

Решение 1.



Примем ребро куба за 1. Тогда $AC_1 = \sqrt{3}$. Поскольку $CE : EC_1 = 2:1$, получаем $CE = \dfrac{2CC_1}{3} = \dfrac{2}{3}$, $C_1E = \dfrac{CC_1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Проведём через точку C_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает ребро BB_1 в точке F, причём треугольники BCE и C_1FB_1 равны. Искомый угол равен углу AC_1F (или смежному с ним).

В прямоугольном треугольнике C_1FB_1 с прямым углом B_1

$$C_1F = BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

В прямоугольном треугольнике ABF с прямым углом B

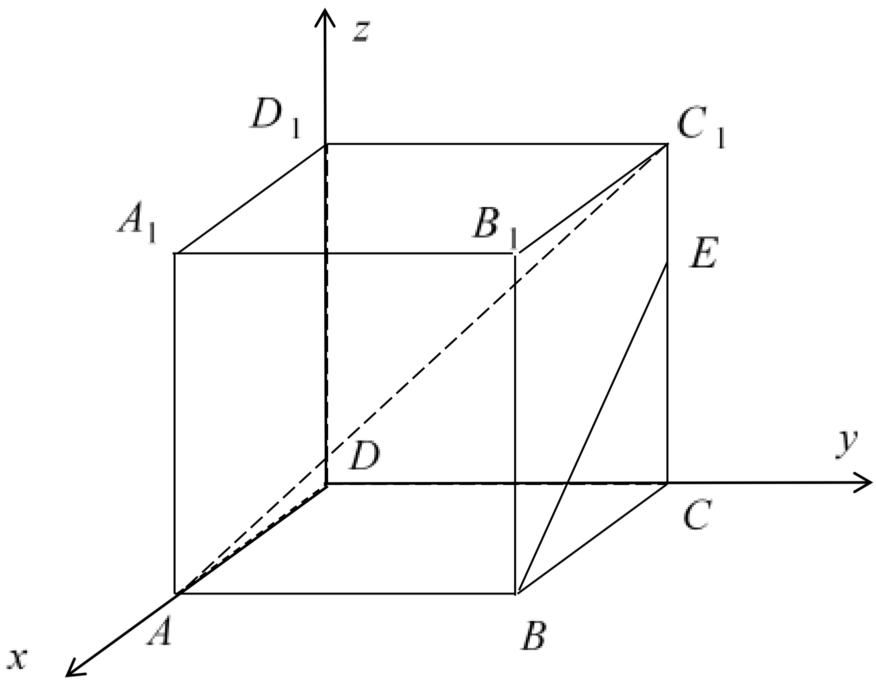
$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{AB^2 + C_1E^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

В треугольнике AC_1F $AF^2 = AC_1^2 + C_1F^2 - 2 \cdot AC_1 \cdot C_1F \cdot \cos \angle AC_1F$,

Откуда $\cos \angle AC_1F = \dfrac{AC_1^2 + C_1F^2 - AF^2}{2 \cdot AC_1 \cdot C_1F} = \dfrac{5\sqrt{39}}{39}$.

Ответ: $\arccos \dfrac{5\sqrt{39}}{39}$.

Решение 2.



Введём прямоугольную систему координат: начало координат поместим в вершину куба D, ось Ox направлена вдоль ребра DA, ось Oy – вдоль ребра DC, ось Oz – вдоль ребра DD_1, единичный отрезок равен длине ребра куба.

Координаты точек: $B(1;1;0)$, $E\left(0;1;\frac{2}{3}\right)$, $A(1;0;0)$, $C_1(0;1;1)$, тогда

координаты векторов: $\overrightarrow{BE}\left(-1;0;\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{AC_1}(-1;1;1)$.

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC_1}=1+0+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

С другой стороны $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC_1}=\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot\cos\alpha$, где

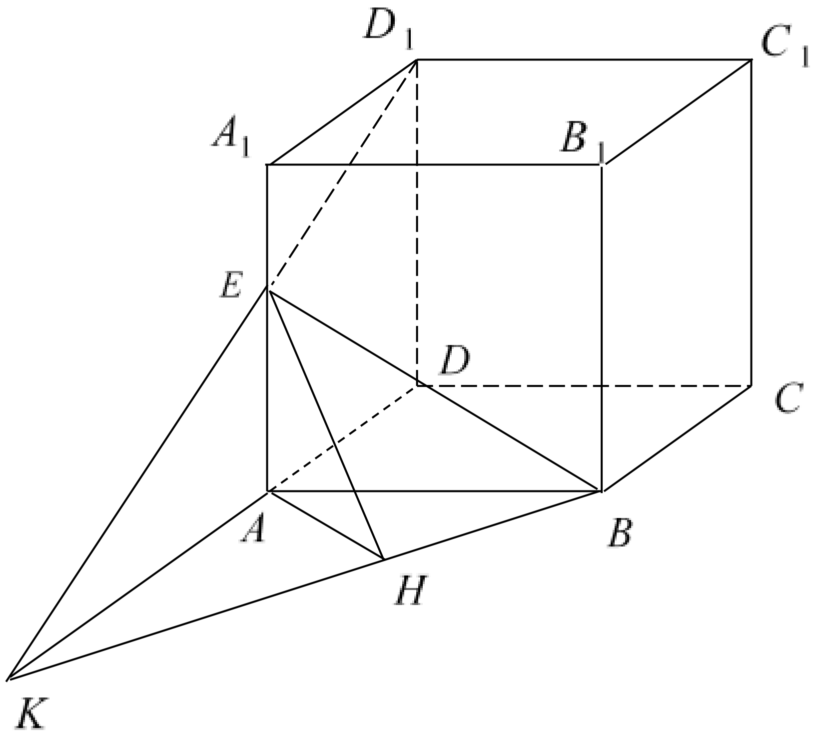
$\left|\overrightarrow{BE}\right|=\sqrt{1+0+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\left|\overrightarrow{AC_1}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$, α – угол между векторами.

Следовательно, $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{39}}$.

Ответ: $\arccos\frac{5\sqrt{39}}{39}$.

Задача 10 (ЕГЭ-2012). В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

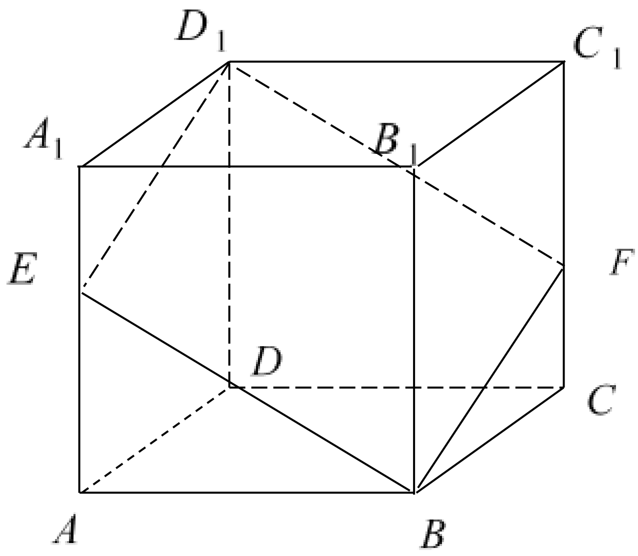
Решение 1.



Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB. Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1. Поскольку $AE : EA_1 = 3 : 2$, получаем $AE = \dfrac{3AA_1}{5} = 3,\ EA_1 = \dfrac{2AA_1}{5} = 2$. Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE получаем $AK = \dfrac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 3$. В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A: $AB = 2$, $AK = 3$, $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{13}$, откуда высота $AH = \dfrac{AK \cdot AB}{BK} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$. Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем $tg\angle AHE = \dfrac{AE}{AH} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $arctg\,\dfrac{\sqrt{13}}{2}$**.**

Решение 2.



Заметим, что при проектировании фигуры, лежащей в плоскости α, на плоскость β площади фигуры S и её проекции $S_{\text{пр}}$ связаны между собой следующим соотношением: $S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между плоскостями α и β. Изобразим сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B, E, D_1 и найдём его площадь S. Сечением служит параллелограмм со сторонами $BE = \sqrt{13}$, $D_1E = \sqrt{8}$ и диагональю $BD_1 = \sqrt{33}$. Из треугольника BED_1 по теореме косинусов

$BD_1{}^2 = D_1E^2 + BE^2 - 2D_1E \cdot BE \cdot \cos\angle BED_1$.

Тогда $\cos\angle BED_1 = \dfrac{D_1E^2 + BE^2 - BD_1{}^2}{2D_1E \cdot BE} = -\dfrac{3}{\sqrt{26}}$. Площадь

параллелограмма $S = BE \cdot D_1E \cdot \sin\angle BED_1 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{9}{26}} = 2\sqrt{17}$.

Площадь проекции $S_{\text{пр}} = S_{ABCD} = 4$.

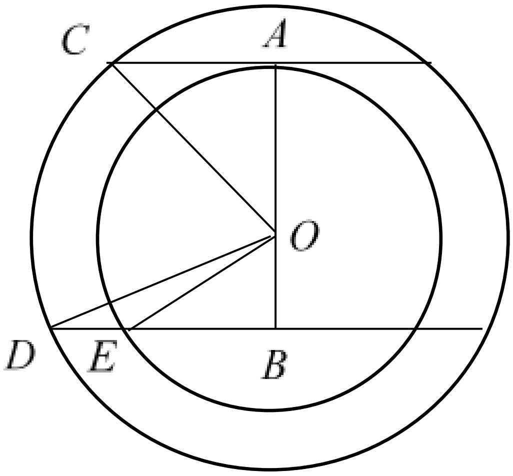
Тогда из $S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\varphi$ получаем $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$**.**

Замечание. Проверьте, что $\arccos\dfrac{2\sqrt{17}}{17} = arctg\,\dfrac{\sqrt{13}}{2}$**.**

Задача 11 (Досрочный ЕГЭ-2013). Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

Решение.



Рассмотрим сечение шаров плоскостью, проходящей через их центр перпендикулярно плоскостям α и β. Обозначим радиус большего шара R, радиус меньшего шара r.

Из треугольника OAC $\quad R^2 - r^2 = AC^2$.

Из треугольника ODB $\quad R^2 = BD^2 + OB^2$.

Из треугольника OBE $\quad r^2 = OE^2 + OB^2$.

Вычитая из второго равенства третье и подставляя в первое, получаем
$BD^2 - OE^2 = AC^2$.

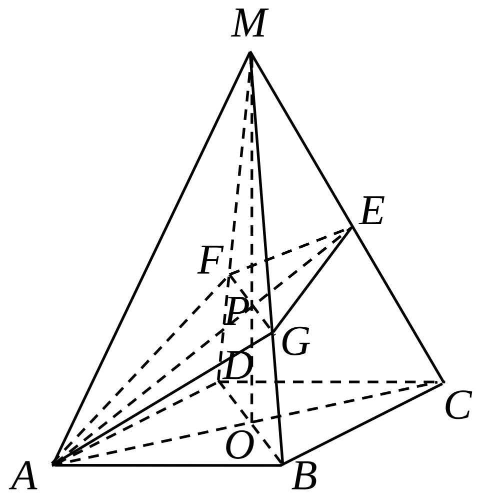
Отсюда $\quad BD^2 = OE^2 + AC^2$.

Умножая обе части последнего равенства на π, получим искомую площадь сечения $\quad \pi \cdot BD^2 = \pi \cdot OE^2 + \pi \cdot AC^2 = 7 + 5 = 12$.

Ответ: 12.

Задача 12 (ЕГЭ-2013). В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD.

Решение



Пусть точка E – середина ребра MC. Отрезок AE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2:1$, где O – центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MD, G – ребру MB), откуда

$$MF : FD = MG : GB = MP : PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3} BD = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = 4\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $AFEG$ – искомое сечение. Отрезок AE – медиана треугольника MAC, значит,

$$AE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MA^2 - MC^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MA^2}}{2} = \frac{13}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали AE и FG четырёхугольника $AFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{AFEG} = \dfrac{AE \cdot FG}{2} = 13\sqrt{2}$.

Ответ: $13\sqrt{2}$.