Тема 21
Задачи с параметрами

Определение. Рассмотрим уравнение

$$F(a,b,c,...,k,x)=G(a,b,c,...,k,x), \qquad (1)$$

где $a,b,c,...,k,x$ – переменные величины, значения которых содержатся во множестве действительных чисел. Если зафиксировать значения переменных $a,b,c,...,k$, то мы получим уравнение относительно x, то есть уравнение с одним неизвестным. Решение его зависит от выбранных значений переменных $a,b,c,...,k$, значит, является функцией от этих переменных: $x=f(a,b,c,...,k)$. Переменные $a,b,c,...,k$, которые при решении уравнения (1) считаются постоянными, называются *параметрами,* а само уравнение (1) – *уравнением, содержащим параметры.*

Пример 1. Решите уравнение $m=\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m(x-1)}$ относительно x.

Решение. ОДЗ: $m\neq 0$, $x\neq 1$.

Умножая обе части уравнения на $m(x-1)\neq 0$, получим

$$m^2(x-1)=x-1+m-1,\ m^2(x-1)-(x-1)=m-1,$$

$$\left(m^2-1\right)(x-1)=m-1. \qquad (2)$$

Дальнейшие рассуждения зависят от значения параметра m.

1) При $m\neq\pm 1$ обе части уравнения (2) можно разделить на $m^2-1\neq 0$. Получим $x-1=\frac{m-1}{m^2-1}=\frac{1}{m+1}$, отсюда $x=\frac{1}{m+1}+1=\frac{m+2}{m+1}$.

Необходимо учесть условие $x\neq 1$ (ОДЗ). Выясним, при каких значениях m выполняется равенство $\frac{m+2}{m+1}=1$. Итак, $m+2=m+1$, то есть $2=1$. Последнее числовое равенство неверно, следовательно, $x=\frac{m+2}{m+1}$ удовлетворяет ОДЗ при всех рассматриваемых значениях параметра m.

2) При $m=1$ в уравнении (2) получим $0\cdot(x-1)=0$. Тогда x – любое действительное число, кроме 1.

3) При $m=-1$ получим равенство $0\cdot(x-1)=-2$, которое не выполняется ни при каком значении x.

Ответ: $x=\frac{m+2}{m+1}$ при $m\neq\pm 1$, $m\neq 0$; x – любое действительное число, кроме 1, при $m=1$; нет решений при $m=-1$; уравнение не имеет смысла при $m=0$.

Итак, решить уравнение (1) – значит указать, при каких значениях параметров существуют решения, и каковы они.

Замечание. Принято параметры обозначать латинскими буквами из начала алфавита: $a, b, c, ..., k, l, m$, а неизвестные – из конца: x, y, z.

Пример 2. Решите уравнение $mx^2 + 3mx - (m+2) = 0$ относительно x.

Решение. 1) При $m = 0$ уравнение принимает вид $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 2 = 0$ и не имеет корней.

2) При $m \neq 0$ уравнение является квадратным. Если дискриминант $D = 9m^2 + 4m(m+2) = m(13m+8) \geq 0,$ то есть $m \leq -\dfrac{8}{13}$ или $m > 0,$ то $x_{1,2} = \dfrac{-3m \pm \sqrt{m(13m+8)}}{2m}$. Если $D < 0$, то есть $-\dfrac{8}{13} < m < 0$, то уравнение не имеет решений.

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{-3m \pm \sqrt{m(13m+8)}}{2m}$ при $m \leq -\dfrac{8}{13}$ и при $m > 0$; нет решений при $-\dfrac{8}{13} < m \leq 0$.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$ относительно x.

Решение. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1,$ или $(a-2)x = 2a + 1.$ (Заметим, что при возведении в чётную степень могут появляться посторонние корни, поэтому необходимо делать проверку найденных решений.)

1) При $a = 2$ уравнение не имеет корней.

2) Если $a \neq 2$, то $x = \dfrac{2a+1}{a-2}$. Для проверки подставим полученное значение x в исходное уравнение. В левой части уравнения имеем:

$$\sqrt{\frac{(2a+1)^2}{(a-2)^2} + \frac{a(2a+1)}{a-2} - 2a} = \sqrt{\frac{(3a-1)^2}{(a-2)^2}} = \left|\frac{3a-1}{a-2}\right|.$$

При $a \leq \dfrac{1}{3}$ и при $a > 2$ $\left|\dfrac{3a-1}{a-2}\right| = \dfrac{3a-1}{a-2}$, при $\dfrac{1}{3} < a < 2$ $\left|\dfrac{3a-1}{a-2}\right| = \dfrac{1-3a}{a-2}$.

В правой части исходного уравнения получим $\dfrac{2a+1}{a-2} + 1 = \dfrac{3a-1}{a-2}.$

Сравнивая обе части уравнения, заключаем что $x = \dfrac{2a+1}{a-2}$ при $a \leq \dfrac{1}{3}$ или $a > 2$; при других значениях параметра решений нет.

Ответ: $x=\dfrac{2a+1}{a-2}$ при $a\le\dfrac{1}{3}$ и при $a>2$; нет корней при $\dfrac{1}{3}<a\le 2$.

Пример 4. Решите неравенство $\log_{\frac{x}{a}} a > \log_{a^2x} a^2$ относительно x.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} \dfrac{x}{a}>0, \\ \dfrac{x}{a}\ne 1, \\ a>0, \\ a^2x>0, \\ a^2x\ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0, \\ x>0, \\ x\ne a, \\ x\ne \dfrac{1}{a^2} \end{cases}.$

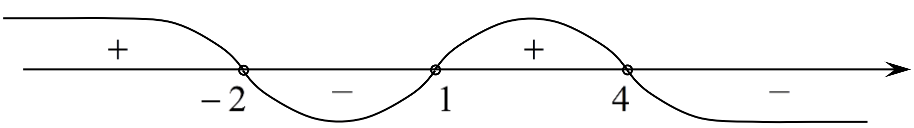
Перейдём в исходном неравенстве к новому основанию a:

$$\frac{1}{\log_a x-1}>\frac{2}{\log_a x+2}.$$

Выполнив замену переменного $t=\log_a x$, получим неравенство

$$\frac{1}{t-1}>\frac{2}{2+t}\Rightarrow\frac{2+t-2(t-1)}{(t-1)(t+2)}>0\Rightarrow\frac{4-t}{(t-1)(t+2)}>0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.



Имеем $t<-2$ или $1<t<4$.

Сделаем обратную замену переменного: $\log_a x<-2$ или $1<\log_a x<4$, то есть $\log_a x<\log_a \dfrac{1}{a^2}$ или $\log_a a<\log_a x<\log_a a^4$.

Рассмотрим возможные случаи.

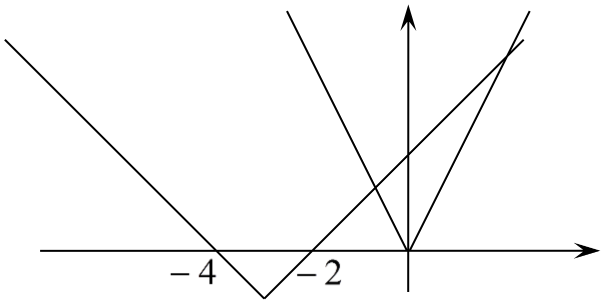
1) $0<a<1$, тогда $x>\dfrac{1}{a^2}$ или $a^4<x<a$ – не противоречит ОДЗ.

2) $a>1$, тогда $x<\dfrac{1}{a^2}$ или $a<x<a^4$. Учитывая ОДЗ, получаем $0<x<\dfrac{1}{a^2}$ или $a<x<a^4$.

Ответ: $x\in\left(a^4;a\right)\cup\left(\dfrac{1}{a^2};+\infty\right)$ при $0<a<1$; $x\in\left(0;\dfrac{1}{a^2}\right)\cup\left(a;a^4\right)$ при $a>1$; неравенство не имеет смысла при $a<0$ и $a=1$.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x+3|-1=|2x-a|$ имеет единственный корень.

Решение. Построим графики функций $y=|x+3|-1$ и $y=2|x|$ (то есть $y=|2x-a|$ при $a=0$).



Заметим, что при $a \neq 0$ график функции $y=|2x-a|$ перемещается влево или вправо, при этом единственная точка пересечения графиков получается тогда, когда «нос» графика функции $y=|2x-a|$ попадает в точку пересечения графика функции $y=|x+3|-1$ с осью абсцисс, то есть при $x=-4$ или $x=-2$, что соответствует значениям параметра $a=-8$ или $a=-4$.

Ответ: $a=-8$, $a=-4$.

Итак, при решении уравнения или неравенства с параметрами необходимо:

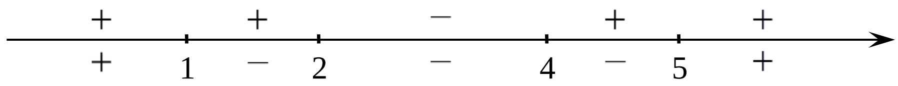
1) **найти область допустимых значений неизвестных величин и параметров;**
2) **учесть монотонность функций (показательной, логарифмической, других монотонных функций на всей области определения или на рассматриваемом промежутке); ограниченность функций (в первую очередь тригонометрических функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$); чётность или нечётность функций;**
3) **обеспечить равносильность преобразований;**
4) **решение задач с параметрами удобно сопровождать иллюстрациями.**

Пример 6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-6x+5\right|=a$$

имеет ровно три корня.

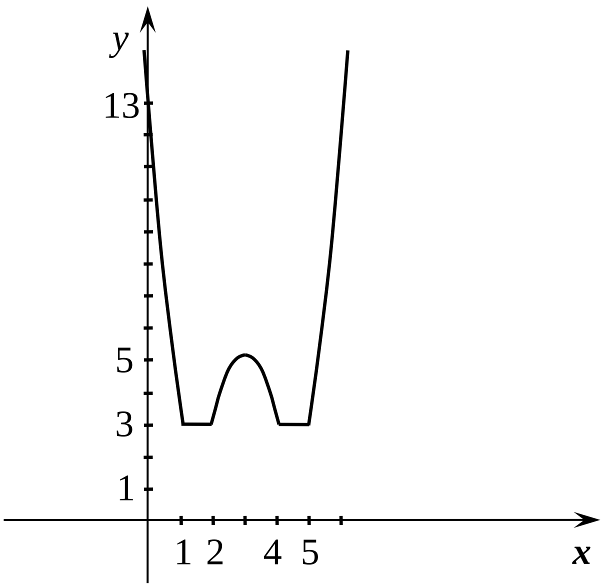
Решение. Построим график функции $f(x)=\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-6x+5\right|$. Предварительно отметим на числовой прямой критические точки модулей и знаки подмодульных выражений в каждой из полученных областей.



Здесь над прямой показаны знаки трёхчлена x^2-6x+8, а под прямой – знаки трёхчлена x^2-6x+5.

Тогда $f(x)=\begin{cases} 2x^2-12x+13, & \text{при } x<1,\ x>5, \\ -2x^2+12x-13, & \text{при } 2<x<4, \\ 3, & \text{при } 1\le x\le 2,\ 4\le x\le 5. \end{cases}$

Получаем график функции



Исходное уравнение имеет три корня, если горизонтальная прямая $y=a$ пересекает график функции ровно в трёх точках. Тогда эта прямая должна коснуться графика функции в точке $(3;5)$, что получится при $a=5$.

Ответ: $a=5$.

Пример 7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$ имеет ровно три корня.

Решение. Выделяя полный квадрат в первом сомножителе, получим

$$\left(-(x-2)^2+a+3\right)(a+1-|x-2|)=0 \text{ или } \left((x-2)^2-(a+3)\right)\left(|x-2|-(a+1)\right)=0.$$

Пусть $t=x-2$, тогда последнее уравнение примет вид

$$\left(t^2-(a+3)\right)\left(|t|-(a+1)\right)=0.$$

Функция $f(t)=\left(t^2-(a+3)\right)\left(|t|-(a+1)\right)$ чётная, и уравнение $f(t)=0$ имеет нечётное число корней только в случае, когда один из корней равен нулю, следовательно, $(a+3)(a+1)=0$, откуда $a=-3$ или $a=-1$.

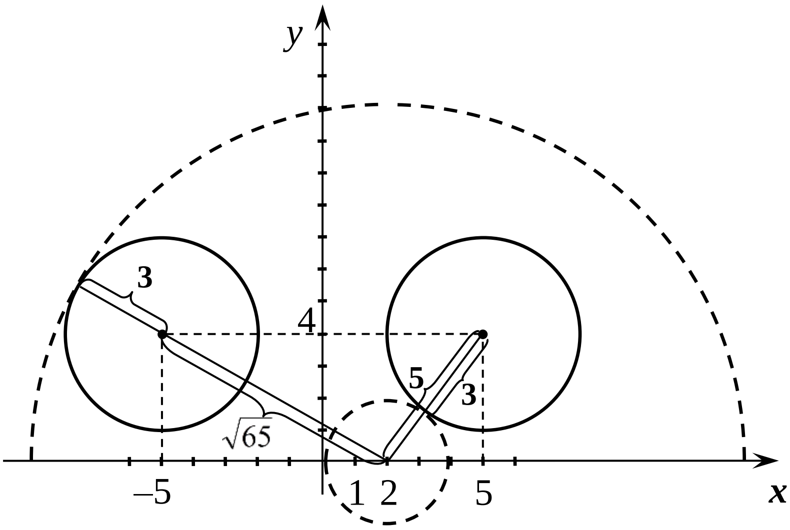
Найдём количество корней уравнения при найденных значениях a: 1) $a=-3$. Уравнение имеет вид $(x-2)^2(|x-2|+2)=0$ и $x=2$ – единственный корень этого уравнения; 2) $a=-1$. Уравнение $\left((x-2)^2-2\right)\cdot|x-2|=0$ имеет три корня $x_{1,2}=2\pm\sqrt{2},\ x_3=2$.

Ответ: $a=-1$.

Пример 8. (ЕГЭ–2011) Найдите все положительные a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\(x-2)^2+y^2=a^2.\end{cases}$$

Решение. Если $x\ge 0$, то первое уравнение системы перепишется $(x-5)^2+(y-4)^2=3^2$. Получили уравнение окружности с центром в точке $(5;4)$ радиуса 3. Заметим, что для всех точек этой окружности выполняется неравенство $x\ge 0$. Если же $x<0$, то приходим к уравнению $(x+5)^2+(y-4)^2=3^2$ окружности с центром в точке $(-5;4)$ радиуса 3. Для всех точек этой окружности выполняется неравенство $x<0$. Таким образом, первое уравнение системы на плоскости определяет пару окружностей. Второе уравнение системы также является уравнением окружности с центром в точке $(2;0)$ радиуса a (учитываем, что $a>0$).



Система уравнений имеет единственное решение, если окружность $(x-2)^2 + y^2 = a^2$ с объединением окружностей $(x \pm 5)^2 + (y-4)^2 = 3^2$ имеет одну общую точку. Учитывая, что центры окружностей и точка касания этих окружностей лежат на одной прямой, находим: $a = 2$, $a = 3 + \sqrt{65}$ (на рисунке соответствующие окружности показаны пунктирной линией).

Ответ: $a = 2$, $a = 3 + \sqrt{65}$.