Тема 1

Действительные числа. Арифметические вычисления

Натуральные числа – это числа, используемые для счёта: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Натуральные числа образуют множество, называемое *множеством натуральных чисел*. Множество всех натуральных чисел обозначается символом **N**: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Если для заданных натуральных чисел n и p найдётся натуральное число q, такое, что $n = p \cdot q$, то говорят, что число n *делится нацело* на число p. Число p называется *делителем* числа n, а о натуральном числе n говорят, что оно *кратно* p. Натуральное число, единственным делителем которого являются только оно само и единица, называется *простым* числом. Все остальные натуральные числа называются *составными*. Натуральное число 1 не считается простым числом.

Представление натурального числа n в виде произведения двух и более простых чисел называется *разложением на простые множители*.

Натуральное число называется *чётным*, если среди его простых множителей имеется число 2.

Некоторые признаки делимости натуральных чисел

Признак делимости на 2. Число делится на 2, если его последняя цифра есть число чётное или ноль.

Признак делимости на 4. Число делится на 4, если две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4.

Признак делимости на 8. Число делится на 8, если три последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 8.

Признак делимости на 3 и на 9. Число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

Признак делимости на 5. Число делится на 5, если оно оканчивается либо на ноль, либо на 5.

Признак делимости на 25. Число делится на 25, если две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 25.

Признак делимости на 11. Число делится на 11, если у него сумма цифр, занимающих чётные места, либо равна сумме цифр, занимающих нечётные места, либо отличается от неё на число, делящееся на 11.

Общим кратным нескольких натуральных чисел называется натуральное число, являющееся кратным для каждого из них. Наименьшее из общих кратных называется *наименьшим общим кратным* (НОК) этих натуральных чисел.

Для нахождения НОК нескольких чисел необходимо:

1) разложить числа на простые множители;
2) перечислить все простые множители, входящие хотя бы в одно из разложений чисел;
3) возвести каждый из перечисленных множителей в наибольшую степень, с которой этот простой множитель входит в разложения данных чисел;
4) произведение полученных степеней простых множителей и даст число, являющееся НОК рассматриваемых чисел.

Задача 1. Найдите НОК чисел 396 и 3528.

Решение.

1. Напишем разложение на простые множители данных чисел:
$$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11; \qquad 3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$
2. Выпишем простые множители, входящие хотя бы в одно разложение:
$$2;\ 3;\ 7;\ 11.$$
3. Наибольшая степень, с которой множитель 2 входит в канонические разложения, равна 3; пишем 2^3.

Наибольшие степени, с которыми множители 3 и 7 входят в канонические разложения, равны 2; пишем 3^2 и 7^2.

Наибольшая степень, с которой множитель 11 входит в канонические разложения, равна 1; пишем 11.

4. Записываем произведение полученных степеней: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = 38\,808$. Таким образом, НОК(396; 3528)=38 808.

Общим делителем нескольких натуральных чисел называется натуральное число, являющееся делителем каждого из данных чисел. Наибольший из общих делителей называется *наибольшим общим делителем* (НОД) этих натуральных чисел.

Если наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел равен единице, то эти числа называются *взаимно простыми*.

Для нахождения НОД нескольких чисел необходимо:

1) разложить числа на простые множители;

2) перечислить все общие простые множители, входящие в разложения каждого из данных чисел;
3) возвести каждый из перечисленных множителей в наименьшую степень, с которой этот простой множитель входит в разложения данных чисел;
4) произведение полученных степеней простых множителей и даст число, являющееся НОД рассматриваемых чисел.

Задача 2. Найдите НОД чисел 396 и 3528.

Решение.

1. Напишем разложение на простые множители данных чисел:
$$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11; \qquad 3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$
2. Выпишем простые множители, входящие в оба разложения: 2; 3.
3. Наименьшие степени, с которыми множители 2 и 3 входят в канонические разложения, равны 2; пишем 2^2 и 3^2.
4. Записываем произведение полученных степеней: $2^2 \cdot 3^2 = 36$. Таким образом, НОД(396; 3528)=36.

Множество целых чисел есть множество, полученное в результате добавления к множеству натуральных чисел **N** числа ноль (обозначаемого символом 0) и чисел, противоположных натуральным. Множество всех целых чисел обозначается символом **Z**: $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$. Натуральные числа в множестве целых чисел называются положительными целыми числами, а числа противоположные натуральным – отрицательными целыми числами.

Рациональным числом называется такое число, которое может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное число. Множество всех рациональных чисел обозначается символом **Q**.

Рациональными числами являются, например: $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $4\frac{6}{11}$, $0{,}13$, $0{,}(3)$, $\log_2 8$, $\sin\frac{\pi}{6}$.

Числа, которые нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное число, называются *иррациональными числами.* Множество всех иррациональных чисел обозначается символом **I**.

Иррациональными числами являются, например: $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\frac{\pi}{6}$, $\pi \approx 3{,}14$, $e \approx 2{,}7$, $\log_2 7$, $\arcsin\frac{1}{6}$.

Множество, состоящее из всех рациональных и всех иррациональных чисел, называется *множеством действительных чисел* и обозначается символом **R**.

Задача 3. Вычислите: $\dfrac{3\frac{5}{6} - 37\frac{1}{3} : \frac{7}{2}}{\left(1\frac{11}{18} + 1\frac{19}{24}\right) : \frac{49}{16}} + 6{,}15$.

Решение.

1. $37\frac{1}{3} : \frac{7}{2} = 37\frac{1}{3} : \frac{7}{2} = \frac{112}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{112 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{16 \cdot 2}{3} = \frac{32}{3}$.
2. $3\frac{5}{6} - \frac{32}{3} = \frac{23}{6} - \frac{32}{3} = \frac{23 - 64}{6} = -\frac{41}{6}$.
3. $1\frac{11}{18} + 1\frac{19}{24} = 2 + \frac{11}{18} + \frac{19}{24} = 2 + \frac{44 + 57}{72} = 2 + \frac{101}{72} = \frac{245}{72}$.
4. $\frac{245}{72} : \frac{49}{16} = \frac{245}{72} \cdot \frac{16}{49} = \frac{245 \cdot 16}{72 \cdot 49} = \frac{245 \cdot 2}{9 \cdot 49} = \frac{5 \cdot 2}{9} = \frac{10}{9}$.
5. $\dfrac{-\frac{41}{6}}{\frac{10}{9}} = -\frac{41 \cdot 9}{6 \cdot 10} = -\frac{41 \cdot 3}{2 \cdot 10} = -\frac{123}{20} = -6{,}15$.
6. $-6{,}15 + 6{,}15 = 0$. *Ответ*: 0.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Вычислите: 1. $13 \cdot 2^4 - 5 \cdot (-7)^3 - (-3)^3$;

2. $13 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^3 + 6 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^3 - (-2)^3$.

Задание 2. Найдите НОК и НОД следующих чисел:

1. 693 000 и 1 194 375; 2. 49 896 и 26 460.

Задание 3. Вычислите:

1. $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}$;

2. $\sqrt{7-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{148}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{3}}$;

3. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{-3}\right)^{-6}\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)^{3}}+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^{-2}\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)^{2}}$.

Ответы

1.1. 1950; **1.2.** 152; **2.1.** 315 315 000; 2625; **2.2.** 1 746 360; 756; **3.1.** 1; **3.2.** 74; **3.3.** $19-6\sqrt{10}$;