# Тема 1
# Системы счисления
# Теория

Для начала надо вспомнить, что же такое системы счисления.

**Система счисления (СС)** — это совокупность правил записи чисел посредством конечного набора символов (цифр).

Системы счисления бывают:

- непозиционными (в этих системах значение цифры не зависит от ее позиции — положения в записи числа);
- позиционными (значение цифры зависит от позиции).

**Непозиционные системы счисления**

Примеры: унарная, римская, древнерусская и др.

**Позиционные системы счисления**

Основание системы счисления — количество различных цифр, используемых в этой системе. Вес разряда — отношение количественного эквивалента цифры в этом разряде к количественному эквиваленту той же цифры в нулевом разряде.

Всего в нашей, десятичной, системе счисления десять цифр, от 0 и до 9. Эти цифры образуют числа, то есть 1337, 228 и т. д. Рассмотрим число 12345 по разрядам:

5 - это разряд единиц.

4 - это разряд десяток, это 4 раза по десять единиц, как только мы набираем в единицах 10, мы прибавляем к десяткам 1.

3 - разряд сотых, это десять десятков или же сто единиц и т. д. В общем, от того какую систему счисления мы используем, зависит то, сколько нам надо набрать единиц/десяток/сотен, чтобы перейти в следующий разряд. В нашей, десятичной, системе счисления, надо набирать по десять. В двоичной системе по два, в восьмеричной по восемь, в шестнадцатеричной по шестнадцать. Остановимся отдельно на шестнадцатеричной системе счисления: в нашей системе всего десять цифр, а в шестнадцатеричной их 16. Что же делать? Недостающий цифры заменяются буквами английского алфавита. Посмотрите на первую таблицу (табл. 1), в ней приведены примеры счета в четырех системах счисления. В первой строке обозначается основание системы счисления, основание – это как раз количество цифр в этой системе.

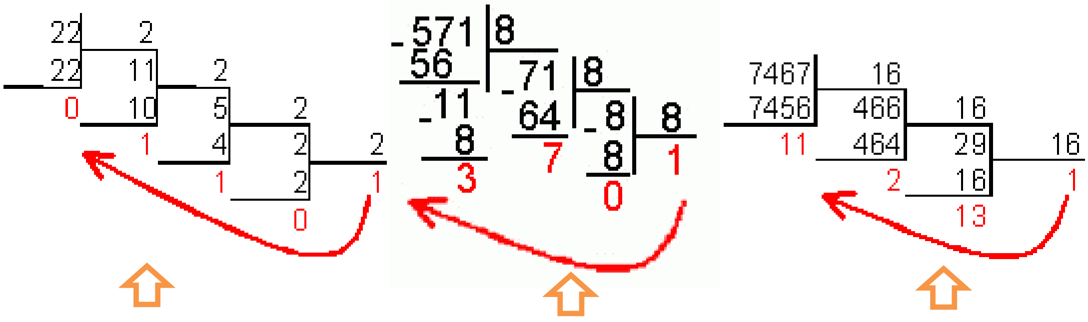
Табл. 1

| Системы счисления | | | |
|---|---|---|---|
| Десятичная q = 10: цифры 0,1,2,…, 9 | Двоичная q = 2: цифры 0,1 | Восьмеричная q = 8: цифры 0,1,2,…, 6,7 | Шестнадцатеричная q = 16: цифры 0,1,…,9,A,B,C,D,E,F |
| | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 2 | 2 |
| 3 | 11 | 3 | 3 |
| 4 | 100 | 4 | 4 |
| 5 | 101 | 5 | 5 |
| 6 | 110 | 6 | 6 |
| 7 | 111 | 7 | 7 |
| 8 | 1000 | 10 | 8 |
| 9 | 1001 | 11 | 9 |
| 10 | 1010 | 12 | A |
| 11 | 1011 | 13 | B |
| 12 | 1100 | 14 | C |
| 13 | 1101 | 15 | D |
| 14 | 1110 | 16 | E |
| 15 | 1111 | 17 | F |
| 16 | 10000 | 20 | 10 |
| 17 | 10001 | 21 | 11 |

Существует несколько вариаций первого задания, которые будут присутствовать в ЕГЭ, одни более простые, другие сложнее, но во всех требуется знание систем счисления, умение перевода из одной системы счисления в другую. Повторим способы перевода из одной системы счисления в другую. Начнем с того, что существует всего две основные операции по переводу, это перевод из любой системы счисления в десятичную, и наоборот, перевод из десятичной в любую другую.

## Перевод из десятичной в другую систему счисления

Для того, чтобы перевести из десятичной системы в любую другую, надо десятичное число разделить на основание системы, в которую мы хотим перевести, при этом надо делить "с остатком", а затем частное от деления снова разделить на основание и так далее, пока частное не будет меньше основания системы, в которую мы хотим перевести. В конце надо записать остатки в обратном порядке, то есть снизу вверх. Посмотрите ниже примеры перевода чисел из десятичной системы в другие системы счисления:



$22_{10} = 10110_2$ $571_{10} = 1073_8$ $7467_{10} = 1D2B_{16}$

## Перевод в десятичную систему счисления из других

Для того, чтобы перевести число в десятичную систему счисления из любой другой надо вначале пронумеровать каждый разряд числа справа налево, нумеровать надо начиная с нуля, то есть разряд единиц пронумеруем нулем, десяток единицей и так далее. Затем надо умножить каждый разряд на основание той системы, из которой мы переводим, при этом основание надо возводить в степень, равную номеру разряда, на который мы умножаем. Далее надо всё это сложить и получится ответ. Посмотрите примеры:

$$\overbrace{1}^{7}\overbrace{1}^{6}\overbrace{1}^{5}\overbrace{0}^{4}\overbrace{1}^{3}\overbrace{0}^{2}\overbrace{0}^{1}\overbrace{0}^{0}{}_2 = 1\cdot2^7+1\cdot2^6+1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0=232_{10}$$

$$\overbrace{F}^{3}\overbrace{D}^{2}\overbrace{A}^{1}\overbrace{1}^{0}{}_{16} = 15\cdot16^3+13\cdot16^2+10\cdot16^1+1\cdot16^0 = 64929_{10}$$

$$\overbrace{7}^{3}\overbrace{5}^{2}\overbrace{4}^{1}\overbrace{3}^{0}{}_8 = 7*8^3+5*8^2+4*8^1+3*8^0=3939_{10}$$

## Значащие и незначащие нули

Рассмотрим число 10 (десять): если мы напишем 010, это по прежнему будет 10, можно написать 0000010 и это по прежнему будет 10 и т.д. Ноль перед единицей означает, что этот разряд равен нулю т. е этот ноль незначащий. В обычной записи, когда мы пишем в тетради, мы этот ноль не пишем, то есть указываем разряды которые есть, а незначащие нули впереди числа не пишем. Значащие нули обозначают разряды, которые есть, но равны нулю. Например, в числе 100(сто) они стоят после единицы. Если мы уберем один из этих нулей, то станет десять, это уже другое число. А вот если мы припишем ноль спереди, то будет 0100, это то же самое.

## Метод триад и тетрад

Существует способ для быстрого перевода из двоичной системы в восьмеричную и шестнадцатеричную. Для перевода из двоичной в восьмеричную: число справа налево делится на группы по три цифры (их называют ТРИады), если в последней группе не хватает цифр, то впереди числа приписывают незначащие нули, чтобы заполнить группу. Затем каждая триада переводится в восьмеричную систему. Если же надо перевести в шестнадцатеричную систему, то группы делают не по три, а по четыре цифры (их называют ТЕТРады). Важно знать, что перевод работает и в обратную сторону, восьмеричное или шестнадцатеричное число делится мысленно на цифры и каждую цифру потом переводим в триаду, для восьмеричной, или в тетраду, если переводим из шестнадцатеричной. Посмотрите на вторую таблицу для тетрад и триад и на приведенные ниже примеры. Эту таблицу можно просто заучить, но намного лучше, если вы научитесь считать в разных системах счисления и самостоятельно делать такую табличку. Да и если выполнить десяток упражнений на перевод этим методом, вы легко его освоите.

Табл. 2

| 2-ичная (триады) | 8-ичная | 2-ичная (тетрады) | 16-ичная |
|---|---|---|---|
| 000 | 0 | 0000 | 0 |
| 001 | 1 | 0001 | 1 |
| 010 | 2 | 0010 | 2 |
| 011 | 3 | 0011 | 3 |
| 100 | 4 | 0100 | 4 |
| 101 | 5 | 0101 | 5 |
| 110 | 6 | 0110 | 6 |
| 111 | 7 | 0111 | 7 |
| | | 1000 | 8 |
| | | 1001 | 9 |
| | | 1010 | A |
| | | 1011 | B |
| | | 1100 | C |
| | | 1101 | D |
| | | 1110 | E |
| | | 1111 | F |

1) **Перевести число $\mathbf{11011111_2}$** в восьмеричную СС.

- Разбиваем двоичное число справа налево на группы из трёх бит (триады) 11 011 111.
- В самой левой группе меньше трёх бит, дописываем слева один незначащий ноль 011 011 111
- Каждую триаду заменяем восьмеричной цифрой: 3 3 7

**Ответ:** $11011111_2 = 337_8$

2) **Перевести число** 100010001002 в шестнадцатеричную СС.

- Разбиваем двоичное число справа налево на группы из четырёх бит (тетрады) 100 0100 0100.
- В самой левой группе меньше четырёх бит, дописываем слева один незначащий ноль 0100 0100 0100
- Каждую тетраду заменяем шестнадцатеричной цифрой: 4 4 4

  **Ответ:** $10001000100_2 = 444_{16}$

## Как производятся арифметические операции в позиционных системах счисления?

Рассмотрим основные арифметические операции: **сложение, вычитание, умножение и деление.** Правила выполнения этих операций в десятичной системе хорошо известны — это сложение, вычитание, умножение столбиком и деление углом. Эти правила применимы и ко всем другим позиционным системам счисления. Только таблицами сложения и умножения надо пользоваться особыми для каждой системы.

В двоичной системе счисления арифметические операции выполняются по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления, т.к. они обе являются позиционными (наряду с восьмеричной, шестнадцатеричной и др.).

### Сложение

Сложение одноразрядных двоичных чисел выполняется по следующим правилам:

0 + 0 = 0
1 + 0 = 1
0 + 1 = 1
1 + 1 = 10

В последнем случае, при сложении двух единиц, происходит переполнение младшего разряда, и единица переносится в старший разряд. Переполнение возникает в случае, если сумма равна основанию системы счисления (в данном случае это число 2) или больше его (для двоичной системы счисления это не актуально).

Сложим для примера два любых двоичных числа:

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\ 101 \\ \hline 10010 \end{array}$$

### Вычитание

Вычитание одноразрядных двоичных чисел выполняется по следующим правилам:

0 - 0 = 0
1 - 0 = 1
0 - 1 = (заем из старшего разряда) 1

1 - 1 = 0

Пример:

```
 1110
-  101
 1001
```

**Умножение**

Умножение одноразрядных двоичных чисел выполняется по следующим правилам:

0 * 0 = 0

1 * 0 = 0

0 * 1 = 0

1 * 1 = 1

Пример:

```
  1110
*   10
+ 0000
 1110
 11100
```

**Деление**

Деление выполняется так же как в десятичной системе счисления:

```
  1 0 0 1 0 0 | 1 0 0
                -------
- 1 0 0          1 0 0 1
    0 1 0 0
    - 1 0 0
-------------
          0
```

**Разбор заданий**

I. Сколько единиц в двоичной записи восьмеричного числа $1731_8$?

Для решения этого задания надо вспомнить метод триад (триад, потому что из восьмеричной в двоичную).

1) $1731_8 = 1\ 7\ 3\ 1_8 = 001\ 111\ 011\ 001_2$

2) в этом числе 7 единиц

**Ответ: 7.**

II. Укажите наименьшее четырёхзначное восьмеричное число, двоичная запись которого содержит 5 единиц. В ответе запишите только само восьмеричное число, основание системы счисления указывать не нужно.

1) минимальное двоичное число, содержащее 5 единиц – это $11111_2$, но в восьмеричной системе оно записывается как 37 – двухзначное число

2) минимальное четырёхзначное восьмеричное число это $1000_8$ = 1 000 000 $000_2$, для решения задачи в конце этого числа нужно заменить четыре нуля на единицы:
1 000 001 $111_2$= $1017_8$
**Ответ: $1017_8$**

III. Сколько единиц в двоичной записи десятичного числа $519_{10}$?
1) Переводим число в двоичную систему. $1000000111_2$
2) В этой записи 4 единицы.
**Ответ: 4**

IV. Даны 4 числа, они записаны с использованием различных систем счисления. Укажите среди этих чисел то, в двоичной записи которого содержится ровно 6 единиц. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.
1. $63_{10}$* $4_{10}$ 2. $F8_{16}$ + $1_{10}$ 3. $333_8$ 4. $11100111_2$
1)нужно перевести все заданные числа в двоичную систему, подсчитать число единиц и выбрать наибольшее из чисел, в которых ровно 6 единиц;
**первый** вариант вначале перемножим, а затем переведем в двоичную. $11111100_2$ то есть в этом числе 6 единиц.
для **второго** варианта воспользуемся связью между шестнадцатеричной и двоичной системами счисления: каждую цифру шестнадцатеричного числа можно переводить отдельно в тетраду (4 двоичные цифры):
$F8_{16}$= 1111 $1000_2$
после добавления единицы $F8_{16}$ + 1 = 1111 $1001_2$ также получаем число, содержащее ровно 6 единиц, но оно меньше, чем число в первом варианте ответа
для **третьего** варианта используем связь между восьмеричной и двоичной системами: каждую цифру восьмеричного числа переводим отдельно в триаду (группу из трёх двоичных цифр):
$333_8$ = 011 011 011 $_2$ = $11011011_2$ это число тоже содержит 6 единиц, но меньше, чем число в первом варианте ответа
**последнее число** 111001112 уже записано в двоичной системе, оно тоже содержит ровно 6 единиц, но меньше первого числа
Таким образом, все 4 числа, указанные в вариантах ответов содержат ровно 6 единиц, но наибольшее из них – первое
**Ответ: 1.**

V. Дано $a=D7_{16}$ и $b=331_8$. Какое из чисел с, записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < c < b$?

1. $11011001_2$ 2. $11011100_2$ 3. 11010111 (2) 4. 11011000 (2)

1) перевести все числа (и исходные данные, и ответы) в одну (любую!) систему счисления и сравнить.

Решим через десятичную, для примера.

2) $a=D7_{16}= 13*16 + 7 = 215_{10}$

3) $b=331_8 = 3 * 8\^{}2 + 3 * 8 + 1 = 217_{10}$

4) переводим в десятичную систему все ответы:

$11011001_2 = 217$, $11011100_2= 220$, $11010111_2= 215$, $11011000_2=216_{10}$

5) между числами 215 и 217 может быть только 216

Ответ: 4.

VI. Для хранения целого числа со знаком используется один байт. Сколько единиц содержит внутреннее представление числа (-78)?

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

Решение:

1) переводим число 78 в двоичную систему счисления:

$78_{10} = 64 + 8 + 4 + 2 = 26 + 23 + 22 + 21 = 1001110_2$

2) по условию число занимает в памяти 1 байт = 8 бит, поэтому нужно представить число с помощью 8 разрядов

3) чтобы получилось всего 8 разрядов (бит), добавляем впереди один ноль:

$78 = 01001110_2$

4) делаем инверсию битов (заменяем везде 0 на 1 и 1 на 0):

$01001110_2 \rightarrow 10110001_2$

5) добавляем к результату единицу

$10110001_2 + 1 = 10110010_2$

это и есть число (-78) в двоичном дополнительно коде

6) в записи этого числа 4 единицы

Ответ: 2.

## Задания для тренировки

1. Сколько значащих нулей в двоичной записи десятичного числа 222?
2. Как представлено число 263 в восьмеричной системе счисления?
   1) $301_8$ 2) $650_8$ 3) $407_8$ 4) $777_8$
3. Как записывается число $A87_{16}$ в восьмеричной системе счисления?
   1) $435_8$ 2) $1577_8$ 3) $5207_8$ 4) $6400_8$
4. Для хранения целого числа со знаком используется один байт. Сколько единиц содержит внутреннее представление числа **(-128)**?
5. Дано: $a = 9D_{16}$, $b = 237_8$. Какое из чисел С, записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?
   1) $10011010_2$ 2) $10011110_2$ 3) $10011111_2$ 4) $11011110_2$
6. Вычислите: $10101010_2$ – $252_8$ + $17_{16}$. Ответ запишите в десятичной системе счисления.
7. Даны числа: 2, 4, 6 и 8. Укажите среди них число, двоичная запись которого содержит наибольшее количество значащих нулей.
8. Укажите наибольшее четырёхзначное восьмеричное число, двоичная запись которого содержит ровно 4 нуля. В ответе запишите только само восьмеричное число, основание системы счисления указывать не нужно.
9. Даны 4 числа, они записаны с использованием различных систем счисления. Укажите среди этих чисел то, в двоичной записи которого содержится ровно 5 единиц. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.
   1) $15_{10}$ 2) $77_8$ 3) $345_8$ 4) $FA_{16}$
10. Дано: $a = EA_{16}$, $b = 354_8$. Какое из чисел С, записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?
   1) $11101010_2$ 2) $11101110_2$ 3) $11101100_2$ 4) $11101011_2$

## Ответы к заданиям для тренировки

1. 2
2. 3) $407_8$
3. 3) $5207_8$
4. 1
5. 2) $10011110_2$
6. $23_{10}$
7. 6
8. 7400
9. 3) $345_8$
10. 4) $11101011_2$